This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

S193.2

HARVARD COLLEGE LIBRARY

BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787-1855)
OF BOSTON

FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION

PAUL DE SAINT-ROBERT.

MÉMOIRES SCIENTIFIQUES,

RÉUNIS ET MIS EN ORDRE.

TOME III.

MÉCANIQUE. HYPSOMÉTRIE.

TURIN,

VINCENT BONA, IMPRIMEUR DE S. M.,

Rue de l'Hôpital, N° 3.

1874.

MÉMOIRES SCIENTIFIQUES.

Tome III.

MÉCANIQUE. HYPSOMÉTRIE.

mesurer les hauteurs d'après la vitesse de propagation du son dans l'air.

Le quatrième mémoire est consacré à la résolution de ce problème qui se présente souvent aux voyageurs : Etant données la hauteur du baromètre et la température à une station, déterminer la différence de niveau avec une autre station, dont on ne connaît que la hauteur du baromètre.

Dans le but de faciliter la solution de ce problème, je donne tour à tour une table numérique, un plan coté et une règle glissante, qui fournissent autant de moyens différents pour le résoudre.

La réduction de la formule barométrique en une règle glissante n'est qu'un cas très-particulier du problème où il s'agit d'effectuer la même opération sur une équation à trois variables indépendantes. Je me suis occupé de ce problème beaucoup plus général, dans une note où l'on trouvera le caractère auquel on reconnaît que la réduction est possible et la manière de l'exécuter.

Ces études sur la formule barométrique se terminent par des tables hypsométriques fondées sur la formule complète à laquelle j'ai été amené.

Dans un dernier mémoire, j'expose une méthode pour mesurer trigonométriquement une hauteur inaccessible à l'aide d'une base verticale, mesurée par le baromètre. C'est une méthode que je suggère aux voyageurs isolés, dans les pays de montagne.

En réunissant des écrits, composés à diverses époques et dont chacun faisait un tout séparé, il était impossible d'éviter quelques répétitions. Je ne pense pas qu'il y ait grand mal à cela, car ainsi le lecteur qui ne veut prendre connaissance que d'un sujet spécial, n'a pas à se donner la peine de lire un grand nombre de pages. Les répétitions servent d'ailleurs à éclaircir ce qui peut paraître douteux au premier aspect.

Au reste, j'alléguerai, comme excuse, le mot de Napoléon I qui disait que de toutes les figures de rhétorique la plus efficace est la répétition.

Mon excellent ami, M. Gilbert Govi, m'a continué, pour l'impression de ce volume, la même assistance qu'il m'avait prêtée pour le précédent. Je lui en témoigne ici ma plus vive reconnaissance.

Turin, avril 1874.

PAUL DE SAINT-ROBERT.

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE.

QU'EST-CE QUE LA FORCE ?

QU'EST-CE QUE LA FORCE ?

(*Revue scientifique de la France et de l'étranger*, n° 42 - 13 avril 1872, Paris).

Il y a peu de mots dont l'emploi soit aussi fréquent et la signification aussi multiple que celui de *force*. Depuis le savant qui cherche à soumettre les forces de la nature et à les faire servir au profit de l'humanité, jusqu'au manœuvre qui gagne son pain au moyen de sa force musculaire, tous ont à chaque instant le mot *force* sur les lèvres, en lui attribuant tantôt un sens, tantôt un autre.

Si dans le langage ordinaire le mot *force* a une signification multiple, on devrait au moins ne lui attribuer dans le langage scientifique qu'une signification parfaitement déterminée. Malheureusement, il n'en est pas ainsi, et même en mécanique, où ce mot est fondamental, il reçoit une triple acception. En effet, dans cette science, on considère la force tantôt comme une pression ou une traction exprimable en kilogrammes (*), tantôt comme une vitesse qui s'exprime

(*) « Une force quelconque peut toujours être mesurée par un poids, et en conséquence « évaluée en nombres au moyen de l'unité de poids ». (DELAUNAY, *Traité de mécanique rationnelle*. Paris, 1856, p. 118).

en mètres (*), tantôt enfin comme un travail, c'est-à-dire comme un poids soulevé à une certaine hauteur, qu'on exprime en kilogrammètres (**).

Cette multiplicité d'acceptions du même mot est fort regrettable, car c'est de là que viennent toutes les difficultés qu'éprouvent les commençants à saisir le véritable esprit de la mécanique.

Nous pensons que quelques considérations sur ce sujet ne seront pas dépourvues d'utilité.

I.

On définit ordinairement la force en disant que « c'est la « cause quelconque qui met un corps en mouvement, ou « seulement qui tend à le mouvoir, lorsque son effet est sus- « pendu ou empêché par une autre cause » (***).

Cette définition est beaucoup trop vague. En effet, « quelle « idée nette », dit CARNOT (****), « peut présenter à l'esprit, « en pareille matière, le nom de *cause?* Il y a tant d'espèces

---

(*) « La force n'étant connue que par l'espace qu'elle fait décrire dans un temps « déterminé, il est naturel de prendre cet espace pour sa mesure ». (LAPLACE, *Mécanique céleste*, t. I, p. 15).

(**) « Dans les arts, on a toujours dit et l'on dira toujours : La force d'un courant « d'eau, d'une machine, d'un cheval ». (D'AUBUISSON, *Traité d'hydraulique*, p. 334). Quand on se sert dans le langage ordinaire du mot *force*, ce mot représente presque toujours un travail.

(***) POISSON, *Traité de mécanique*, t. I, p. 2.

(****) *Principes de l'équilibre et du mouvement*, préface, p. XII, édit. de 1803.

« de causes! Et que peut-on entendre dans le langage précis « des mathématiques par une *force*, c'est-à-dire par une « *cause* double ou triple d'une autre?... Ces causes sont- « elles la volonté ou la constitution physique de l'homme « ou de l'animal qui par son action fait naître le mouve- « ment? Mais qu'est-ce qu'une volonté double ou triple « d'une autre volonté, ou une constitution physique ca- « pable d'un effet double ou triple d'une autre? »

Le défaut capital de la définition généralement adoptée est de s'appliquer à une quantité de choses diverses. Par exemple, lorsqu'un corps en mouvement en rencontre un autre en repos, il le met en mouvement; il est la *cause* de ce mouvement. Donc, d'après la définition, un corps en mouvement est une force.

Un corps abandonné à lui-même se met en mouvement: il tombe. La *cause* qui le fait tomber et qu'on appelle *pesanteur*, est donc une force.

Cette force agit toujours sur le corps, même lorsqu'il est suspendu ou déposé sur un appui. La force qui détermine la pression exercée sur l'appui est-elle de même nature que la force d'un corps en mouvement?

Lorsqu'un obstacle arrête un corps en mouvement, il est la *cause* qui modifie le mouvement: donc, cet obstacle est une force.

Nous pourrions multiplier les exemples pour faire ressortir combien la définition ordinaire de la *force* est indéterminée.

Pour se délivrer du vague inhérent au mot *cause*, il faut préciser l'effet par lequel la force doit s'estimer: car nous ne connaissons les forces que par les effets qu'elles produisent, et nous n'avons aucune notion sur leur nature.

Nous allons examiner ce qui se passe lorsqu'un corps se met en mouvement. C'est un fait d'expérience qu'un corps

ne peut se donner du mouvement à lui-même, c'est-à-dire que s'il est en repos il ne saurait en sortir de lui-même, et que, s'il est en mouvement, il ne pourrait s'arrêter, ni modifier son mouvement sans l'intervention de quelque cause étrangère.

C'est en cela que consiste la loi de l'*inertie*.

Quand un corps change son état de repos ou de mouvement, il ne le fait jamais que par l'action de quelque autre corps, auquel il fait éprouver réciproquement un changement analogue, mais en sens opposé.

Par exemple, lorsqu'un corps en mouvement vient à rencontrer un autre corps, les deux corps se compriment mutuellement, et la vitesse de l'un passe pour ainsi dire dans l'autre, tant que l'un conserve une vitesse supérieure à celle de l'autre. Il arrive un instant où ces corps ont acquis la même vitesse et marchent ensemble, du moins pendant un temps très-court. Après cela, ils pourront se séparer en vertu de l'énergie plus ou moins grande de leur élasticité, qui tend à leur faire reprendre la forme primitive. Mais si les corps sont dépourvus d'élasticité, ou si, après le choc, ils restent fixés l'un à l'autre, alors ils marcheront ensemble avec la même vitesse. C'est ce qui arrive, par exemple, quand une balle lancée contre une pendule balistique y demeure enfoncée.

Pendant que les deux corps, animés de vitesses différentes, réagissent l'un sur l'autre, il naît aux points de contact une pression qui agit en poussant le second corps, et une autre pression égale et contraire qui agit en repoussant le premier corps, c'est-à-dire qu'un corps pousse l'autre autant qu'il en est repoussé.

C'est en cela que consiste la loi de *la réaction égale et contraire à l'action*.

La poussée, l'action d'un corps sur un autre, et la réaction du second sur le premier, sont mesurables à chaque instant par des poids.

Il est tout naturel d'appliquer la dénomination de *force* à cette pression qui naît entre les deux corps pendant qu'ils réagissent l'un sur l'autre, pression sans laquelle il ne pourrait y avoir de communication de mouvement. En effet, la notion de cette force qui se manifeste au contact des deux corps nous est très-familière : elle nous est acquise par l'expérience de tous les instants, cette force étant analogue à la pression née de notre contact avec les corps qui nous environnent.

Nous voyons apparaître la force toutes les fois qu'il y a transmission de mouvement d'un corps à un autre ; cependant il se présente des cas où la force apparaît sans que les corps se touchent. La pesanteur, l'électricité peuvent modifier les mouvements des corps sans que nos organes puissent nous faire saisir quelque liaison matérielle interposée entre le mobile et la cause qui agit mystérieusement sur ce mobile.

Des penseurs qui n'admettent pas qu'il puisse y avoir d'autres forces que celles qui s'exercent entre des corps en contact, expliquent la gravité et toutes les attractions et répulsions par l'action de l'éther, matière subtile qui remplit tout l'espace (*).

Quelle que soit la cause de ces actions à distance, les effets auxquels elles donnent lieu ne diffèrent pas des effets que produisent les forces naissant de la réaction des corps

---

(*) Voyez, à ce propos : *Discours sur la cause de la pesanteur*, par C. H. D. Z. (Chrétien Huygens de Zuylichem). A Leyde, chez Pierre Vander Aa, MDCXC. — Le Sage (Georges-Louis), *Lucrèce newtonien* (*Mém.*, Berlin, 1782). — Secchi, *l'Unité des forces physiques. Essai de philosophie naturelle*. Paris, 1869.

qui se touchent. Ainsi, l'effort que nous exerçons pour empêcher un corps de tomber, l'effort que nous exerçons pour empêcher un morceau de fer de s'approcher d'un aimant, sont autant de forces semblables à celle dont nous avons conscience lorsque nous déplaçons un corps.

Toutes les forces, qu'elles reçoivent le nom de *pression*, ou de *tension*, ou d'*attraction*, ou de *répulsion*, sont de même nature, en ce sens qu'elles peuvent se mesurer toutes par des poids.

Elles obéissent toutes à la loi de la réaction égale à l'action. Ainsi la terre attire un corps autant qu'elle en est attirée, et lorsqu'un corps tombe vers la terre, cette dernière tombe de même vers lui.

Si l'on envisage la force comme une pression ou une tension, toutes les forces deviennent de même nature et numériquement comparables, quelle que soit la différence des agents qui les font naître.

Nous définirons donc la force comme étant *la pression ou la tension qui agit sur un corps pour en modifier l'état de repos ou de mouvement* (*).

On peut objecter à cette définition que nous prenons l'effet pour la cause. A cela nous répondrons que les causes primordiales ne nous sont point connues, et que nous n'en connaissons que les effets, qui à leur tour deviennent des causes secondaires, et que c'est seulement celles-ci que nous pouvons concevoir.

La mécanique ne considère point les causes premières des

(*) Cette acception de force s'accorde avec la valeur étymologique du mot. En effet, *force* vient du bas-latin *fortia*, *forcia*, dérivé du latin *fortis*. Or, le *for* de *fortis* correspond, d'après les lois de transformation, à la racine indo-européenne DHAR, tenir, soutenir. Ainsi, la valeur étymologique de force serait ce qui tient, ce qui soutient (Voyez : Corssen, *Krit. Beitr.*, *42*; *Ausspr.*, I², 149). (*Note de 1874*).

pressions qui déterminent les mouvements ; elle se borne à établir une relation entre ces pressions et les mouvements qui en résultent, quelque diverse que puisse être l'origine de la pression, soit qu'elle provienne des contractions musculaires d'un animal ou de l'attraction d'un centre, ou du choc d'un corps, ou de la dilatation d'un fluide élastique.

Ayant défini la force comme une pression, il nous faut chercher maintenant la loi qui lie la force, exprimée en kilogrammes, à la vitesse, exprimée en mètres. C'est un point délicat de la mécanique qu'il importe de bien éclaircir, parce qu'il laisse souvent des nuages dans l'esprit.

Nous devons invoquer ici un autre principe qu'on peut énoncer de la manière suivante: *Une force agit sur un point matériel qui est en mouvement et sollicité par des forces quelconques, absolument comme si elle était seule et comme si le point était en repos.*

Ce principe, dont la première notion est due à Galilée, et qu'on appelle principe de l'*indépendance de l'effet des forces*, forme avec les deux autres principes de l'inertie et de l'égalité de l'action et de la réaction, le fondement de toute la science mécanique.

Ces principes, ou lois de la nature, ne sauraient être démontrés *a priori*. On doit les considérer comme des postulats dont l'exactitude est rendue incontestable *a posteriori* par l'accord des conséquences qu'on en tire avec les faits observés, surtout en astronomie.

Pour appliquer le principe de l'indépendance de l'effet des forces, considérons deux points matériels égaux soumis à deux forces inégales, l'une, $2F$, double de l'autre, désignée par F. Si les deux points, d'abord en repos, étaient soumis à deux forces F égales et parallèles et dirigées dans le même sens, ces deux points marcheraient d'un

mouvement commun et seraient en repos l'un relativement à l'autre. Mais si l'un des points reçoit en outre, dès l'instant du départ, l'action d'une seconde force F, il prendra par rapport à l'autre point, au bout d'un temps quelconque, une vitesse relative égale à la vitesse absolue que la force unique F imprime à l'autre point dans le même temps. Donc, le point sollicité par la force $2F$ possède à un instant quelconque une vitesse double de celle du point sollicité par la force F.

On verra de même que la force triple $3F$ imprime dans le même temps trois fois plus de vitesse que la force F.

Si les forces sont dans le rapport des deux nombres m et n, ou représentées par mF et nF, les vitesses imprimées, dans le même temps, seront proportionnelles aux forces, c'est-à-dire qu'elles seront comme m à n.

Si nous désignons par le mot *accélération* l'accroissement que reçoit la vitesse dans l'unité de temps, nous pourrons énoncer le théorème suivant : *Les forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment au même point matériel.*

On peut de là passer à la définition de la *masse*, autre quantité dont la conception n'est pas toujours claire.

En vertu de la proportionnalité des forces aux accélérations, on a pour un corps quelconque l'équation

$$F = mG,$$

G étant l'accélération qu'imprime la force F, m un coefficient constant pour un même corps. Ce coefficient varie naturellement quand on passe d'un corps à un autre; sa valeur numérique dépend à la fois de l'unité de force et de l'unité de longueur; mais ces unités une fois choisies,

F et G sont représentés par des nombres, et alors la valeur numérique de m est déterminée.

On est convenu de nommer *masse* ce coefficient, qui est égal au rapport

$$\frac{F}{G}.$$

D'après cela, deux corps ont la même masse lorsque, soumis à l'influence d'une même force, ils acquièrent des vitesses égales dans des temps égaux. L'un aura une masse double, triple, etc., de l'autre, s'il exige une force double, triple, etc. pour prendre une même accélération.

La définition qu'on donne quelquefois de la masse comme étant la *quantité de matière* n'est pas suffisante; à moins qu'on n'ajoute que cette quantité se mesure par la force nécessaire pour procurer au corps une certaine accélération.

Les masses sont comparables entre elles. Dans la mécanique céleste on rapporte toutes les masses à la masse du Soleil prise pour unité; mais dans la mécanique terrestre il n'y a pas, à proprement parler, d'unité de masse, pas plus qu'il n'y a d'unité de poids spécifique ou d'unité de vitesse. En effet, l'adoption d'unité implique nécessairement la liberté du choix; or, une masse est absolument déterminée dès que l'unité de force et l'unité de longueur sont fixées, de sorte qu'il n'y a pas d'unité de masse.

De même qu'on ne dit pas que l'unité de poids spécifique est le poids spécifique d'un corps pesant un kilogramme sous l'unité de volume, ni que l'unité de vitesse est la vitesse d'un corps qui parcourt un mètre en une seconde, on ne doit pas dire non plus que l'unité de masse est la masse qui, sollicitée pendant une seconde par une force constante, égale à un kilogramme, acquerrait une vitesse d'un mètre par seconde.

Pour connaître la masse d'un corps, il suffit d'une expérience qui constate l'accélération qu'il prend sous l'action d'une force connue.

Cette expérience nous est fournie par la chute des corps terrestres dans le vide. On sait que la pesanteur communique, dans un même lieu, a tous les corps, une même accélération g. Si l'on désigne par P le poids d'un corps, l'équation générale donnée plus haut devient alors

$$P = mg ,$$

g étant une constante dont la valeur, à la latitude de 45 degrés et au niveau de la mer, a été trouvée égale à $9^{m},80604$ (Bessel).

Puisque dans un même lieu l'accélération g est la même pour tous les corps, il résulte de l'équation ci-dessus que les masses des corps sont proportionnelles à leur poids; mais il faut se garder de confondre la masse avec le poids. En effet, le poids varie d'un lieu à un autre, tandis que la masse reste absolument constante dans toutes les circonstances, parce que la valeur de g varie proportionnellement à P.

Il nous est facile actuellement de calculer l'accélération que prend un corps sous l'influence d'une force donnée.

En effet, le poids de ce corps divisé par g fera connaître sa masse m, et l'on obtiendra ensuite l'accélération cherchée en divisant par m le nombre des kilogrammes qui mesure la force.

La formule

$$F = mG$$

permet de résoudre toutes les questions que l'on peut se proposer sur le mouvement des corps en ligne droite.

La quantité G, étant la vitesse acquise pendant l'unité de temps, est égale au très-petit accroissement de vitesse dv que la force imprime au corps pendant le temps infiniment petit dt, divisé par ce même temps, c'est-à-dire qu'on a

$$G = \frac{dv}{dt}.$$

D'ailleurs, la vitesse est égale à l'élément de l'espace ds, divisé par l'élément du temps dt, c'est-à-dire qu'on a

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

On en tire

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{v\,dv}{ds},$$

et par conséquent

$$\int F\,dt = mv - mv_0,$$

$$\int F\,ds = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

L'intégrale

$$\int F\,dt$$

s'appelle l'*impulsion* de la force F pendant le temps t. Le produit mv s'appelle la *quantité de mouvement* du corps dont la masse est m et dont la vitesse est v.

D'après cela, la première équation signifie que l'accroissement de la quantité de mouvement pendant un certain temps est égale à l'impulsion pendant le même temps.

L'intégrale

$$\int F ds$$

s'appelle le *travail* de la force F le long du chemin s. La quantité mv^2 a été appelée longtemps et s'appelle encore le plus communément la *force vive* du corps dont la masse est m et la vitesse v ; mais du moment qu'on attache au mot *force* le sens d'une pression ou d'une traction exprimable en kilogrammes, on ne peut plus se servir du mot *force* pour désigner une quantité complexe mv^2, laquelle, mise sous la forme

$$p\frac{v^2}{2g},$$

serait, non une force, mais le produit d'une force par une longueur. Nous préférons la dénomination proposée par M. BELANGER, et nous appellerons *puissance vive* la quantité

$$\frac{1}{2}mv^2 \quad (*).$$

La seconde équation s'énonce, d'après cela, comme il suit : L'accroissement de la puissance vive d'un corps qui se déplace est égal au travail de la force pendant le déplacement.

(*) Les deux dénominations d'*impulsion* et de *puissance vive* ont été proposées et employées par M. BELANGER, dans ses excellents traités de mécanique, où sans luxe de formules analytiques, il expose avec clarté et rigueur les principes de la mécanique. Nous ne pouvons nous empêcher de conseiller ces traités (*Cours de mécanique, ou Résumé des leçons sur la dynamique, la statique et leurs applications à l'art de l'ingénieur*, Paris, 1847 ; — *Traité de la dynamique d'un point matériel*, Paris, 1864 ; — *Traité de la dynamique des systèmes matériels*, Paris, 1866) aux jeunes gens qui veulent acquérir des idées justes sur une science laquelle laisse souvent des nuages dans l'esprit. Nous y avons puisé largement pour écrire cet article, particulièrement en ce qui concerne la dispute sur les forces vives.

Si l'on prend le kilogramme pour unité de force, la seconde sexagésimale pour unité de temps, le mètre pour unité de longueur, il s'ensuit que l'impulsion s'exprimera en kilogrammes-secondes, et le travail en kilogrammètres. Nous ferons remarquer ici, de même que nous l'avons fait plus haut relativement à la masse, qu'à proprement parler il n'y a pas d'unité d'impulsion ni de travail, parce que ni le kilogramme-seconde, ni le kilogrammètre ne sont arbitraires, comme ils devraient l'être si c'étaient de véritables unités, mais qu'ils dépendent d'autres quantités prises pour unités.

Les deux équations précédentes vont nous permettre d'éclaircir une question sur laquelle on a beaucoup disputé dans la première moitié du XVIII[e] siècle. Il s'agissait de savoir quelle était la mesure de la force des corps en mouvement. Selon DESCARTES, NEWTON, EULER, etc., la force d'un corps en mouvement doit se mesurer par la quantité de mouvement; LEIBNITZ, JEAN BERNOUILLI, etc., prétendaient qu'elle est proportionnelle à la force vive.

Les Cartésiens alléguaient à l'appui de leur opinion que, si deux corps non élastiques viennent directement à la rencontre l'un de l'autre avec des vitesses inversement proportionnelles à leurs masses, leur choc mutuel les réduit au repos. Donc, concluaient-ils, ces deux corps, avant leur rencontre, ont des forces égales et contraires qui se trouvent finalement détruites.

Les Leibnitziens s'appuyaient sur l'expérience suivante: qu'on laisse tomber une boule métallique creuse d'une certaine hauteur sur une matière molle où elle puisse s'enfoncer; qu'on double, après l'avoir retirée, son poids, en la chargeant de grenailles, et qu'on la laisse tomber sur la même matière d'une hauteur moitié de celle dont elle

est tombée la première fois, on reconnaîtra que l'enfoncement produit est le même. L'effet étant le même dans les deux cas, on en concluait que, dans les deux cas, la force du corps était la même au moment où il rencontrait la matière molle. Or, les carrés des vitesses de corps qui tombent de diverses hauteurs sont proportionnels aux hauteurs de chute ; donc, disait-on, pour que deux corps en mouvement aient des forces égales, il faut que les carrés des vitesses soient inversement proportionnels aux masses.

Toute la difficulté de cette controverse venait de ce qu'on n'avait pas préalablement défini l'objet du débat en disant ce qu'on entendait par force d'un corps en mouvement.

Un corps en mouvement abandonné à lui-même n'exerce ni ne reçoit aucune force, et si l'on se demande quelle est la force qui a produit son mouvement, ou quelle est celle qui l'anéantirait, cette question est indéterminée. La force peut être d'abord supposée, soit variable, soit constante. Si l'on admet, pour simplifier, qu'elle est constante, cela ne suffit pas pour en calculer la valeur : il faut encore prendre en considération un temps ou un espace, soit le temps qu'a duré l'action de la force, soit l'espace qu'a parcouru le mobile sous l'action de la force.

Si l'on considère le temps, la solution du problème est donnée par la première des équations précédentes, qui devient dans ce cas

$$Ft = mv.$$

Si l'on considère l'espace, la solution est donnée par la seconde équation, qui devient dans le cas présent

$$Fs = \frac{1}{2} mv^2.$$

Ainsi, les philosophes qui, comme DESCARTES, mesuraient la force d'un corps par la masse multipliée par la vitesse, nommaient *force* la quantité complexe Ft, que nous appelons *impulsion*, laquelle est égale à la quantité de mouvement. Ceux qui, comme LEIBNITZ, prenaient pour mesure de la force le produit de la masse par le carré de la vitesse, donnaient le nom de *force* à la quantité complexe Fs, que nous appelons *travail*, qui est égale à la moitié du produit de la masse par le carré de la vitesse.

Si de deux corps qui vont directement à la rencontre l'un de l'autre, on veut savoir lequel des deux entraînera l'autre, il faut considérer le produit Ft, numériquement égal à la quantité de mouvement, parce que l'action des corps l'un sur l'autre dure le même temps. S'il s'agit de savoir lequel des deux pénétrera davantage dans un corps mou, il faut considérer le produit Fs, numériquement égal à la moitié du produit de la masse par le carré de la vitesse, parce que la pénétration correspond à un espace parcouru.

On voit par là que la fameuse dispute se réduit à une pure question de mots, comme D'ALEMBERT l'a fait voir dès 1743. En effet, « les deux partis, dit-il, sont entièrement « d'accord sur les principes fondamentaux de l'équilibre et « du mouvement. Qu'on propose le même problème de mé- « canique à résoudre à deux géomètres, dont l'un soit ad- « versaire et l'autre partisan des forces vives, leurs solu- « tions, si elles sont bonnes, seront toujours parfaitement « d'accord (*). »

Il arrive ici à peu près comme dans la controverse entre les matérialistes et les spiritualistes. Bien que divisés sur

(*) D'ALEMBERT, *Traité de dynamique*, éd. de 1758, p. XXIII du *Discours préliminaire*.

l'existence de l'âme et de Dieu, ils conviennent pourtant tous, s'ils sont sincères, de la même morale, et pensent également qu'il ne peut y avoir de bonheur pour l'homme que dans la pratique rigoureuse de la vertu.

Longtemps on a admis, et quelques personnes admettent encore aujourd'hui, qu'il existe dans la nature deux espèces de forces : les unes supposées sans durée et capables de produire dans les corps des changements brusques de vitesse sans les faire passer par les états intermédiaires ; les autres agissant sans interruption, d'une manière continue, et ne produisant par conséquent un effet sensible qu'après un temps appréciable. On appelait les premières *forces instantanées* ou de *percussion*, les dernières *forces accélératrices*.

Nous avons fait voir qu'une force constante est égale à la quantité de mouvement qu'elle produit, divisée par le temps employé à le produire : d'où il résulte que, pour une même quantité de mouvement produit, la force est d'autant plus grande que la durée de son action est moindre, et qu'il n'y a qu'une force infinie qui puisse produire une quantité déterminée de mouvement dans un temps infiniment court.

On voit par là combien est contraire à une saine physique la conception des forces instantanées. C'est pour cela qu'elle a été repoussée par PONCELET, par CORIOLIS, etc. Cependant on la trouve encore dans quelques-uns de ces petits traités de mécanique, d'ordinaire assez médiocres, qu'on met en tête des traités de physique. De là naissent toutes sortes de difficultés et d'obscurités.

Il arrive de lire, par exemple, qu'un corps lancé dans le vide est soumis à l'action de deux forces, savoir : la force de *projection*, qui est une force instantanée, et la

force de la *pesanteur*, qui est une force accélératrice, et que c'est en vertu de ces deux forces que le corps décrit sa parabole.

Cela n'est pas exact: dès que le corps a reçu sa vitesse initiale par la main ou par l'explosion d'une charge de poudre, ou par tout autre moyen, la force qui l'a poussé cesse, et il n'est plus soumis qu'à une force égale à son poids, si l'on fait abstraction de la résistance de l'air.

C'est la même erreur que commettent ceux qui attribuent le mouvement d'une planète autour du soleil à l'action de deux forces : la force de projection de la planète et la force d'attraction du soleil.

Plusieurs auteurs de mécanique, parmi lesquels l'illustre PONCELET, emploient l'expression de *force d'inertie.*

Dans leur manière de voir, une force ne peut modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps sans faire naître aussitôt une résistance égale et opposée, qui est la force d'inertie. C'est ce que nous appelons la *réaction du corps.*

L'introduction d'une telle force, dont l'action ne se fait sentir qu'autant qu'une force effective agit sur le corps, nous paraît au moins inutile, sinon dangereuse, parce qu'elle complique le langage et prête à l'équivoque en laissant croire que l'inertie est une force.

Dans les corps il n'y a aucune résistance aux forces, car la moindre force qui agirait seule sur un corps quelconque le mettrait en mouvement. Le coup d'aile d'un moucheron mettrait en mouvement une lourde voiture de roulier si toutes les résistances étaient annulées. La seule différence qui existe entre une grande et une petite force c'est que la seconde, pour imprimer la même vitesse à un corps, doit agir beaucoup plus longtemps que la première.

Par exemple, si huit chevaux peuvent imprimer, dans une

seconde de temps, une vitesse d'un mètre à une voiture pesant 10,000 kilogrammes, une souris attelée à la même voiture ne parviendrait à lui imprimer la même vitesse d'un mètre qu'après un nombre de secondes égal au rapport de la force de traction de huit chevaux à la force de la souris. Il est bien entendu qu'on fait abstraction de la résistance du terrain et des divers frottements, car autrement la souris ne parviendrait jamais à ébranler la voiture.

Il nous paraît que la conception de la force d'inertie ne peut avoir pour résultat que de faire naître l'idée inexacte, qui a déjà duré bien assez longtemps, qu'il y a dans les corps en mouvement une force résidente, une *vis insita*, qui est à chaque instant la cause actuelle du mouvement; ce qui n'est pas, si l'on attache au mot *force* l'idée d'un effort, d'une pression ou d'une traction.

La force est, non la cause subsistante de tout mouvement existant, mais la cause qui modifie tout mouvement variable.

II.

Nous allons maintenant parler d'une signification du mot *force* qui tient peut-être le premier rang dans le langage vulgaire. On entend à tout moment dire la *force d'une chute d'eau*, la *force de la poudre à canon*, etc. Qu'est-ce qu'on entend par *force* dans ces locutions et dans une foule d'autres analogues?

Assurément, on n'entend point parler ici d'une pression

ou d'une traction qui puisse être exprimée en kilogrammes. Le sens qu'on attache au mot *force*, dans ces phrases, est celui de *disponibilité de travail*, c'est-à-dire de la quantité de travail qu'on peut retirer d'un moteur, d'un agent quelconque.

Considérons, par exemple, un réservoir d'eau placé à une certaine hauteur. Si l'on en fait tomber l'eau sur des roues hydrauliques, ou si on la fait agir sur des machines à colonne d'eau, on en retire un certain travail qu'on peut employer à moudre du blé ou à tout autre usage.

Un kilogramme de poudre représente un travail qu'on peut utiliser, soit pour faire éclater un rocher, soit pour imprimer une très-grande vitesse à un boulet.

Dans ces cas et dans une infinité d'autres analogues, on appelle *force* la capacité de travail. Or, comme le travail s'exprime en kilogrammètres, la mesure de cette nature de force doit être donnée en kilogrammètres.

Si nous ne voulons pas nous exposer à confondre la force envisagée à ce point de vue avec la force qui se mesure en kilogrammes, il est nécessaire de lui donner un nom différent.

En Angleterre, on a commencé à employer à cet effet le mot *énergie*, qu'on distingue en *énergie potentielle* et en *énergie actuelle* ou *cinétique*.

Un ressort bandé est une énergie potentielle; c'est le magasin du travail qu'il a fallu dépenser pour le bander, travail qu'il peut rendre en se débandant. Une balle de fusil, en sortant de l'arme, est une énergie actuelle ou cinétique qui se transforme en travail lorsqu'elle rencontre un obstacle.

S'il nous appartenait de proposer une dénomination, nous donnerions la préférence au mot *puissance* pour désigner

la capacité de travail, car le mot *énergie* semble plutôt indiquer l'intensité de la force que le résultat de son action le long d'un chemin. La distinction qu'on fait dans le langage ordinaire entre *force* et *puissance* nous semble justifier le sens scientifique que nous proposons d'y attacher.

D'après cela, nous proposerions de distinguer la *puissance* en *puissance disponible* et en *puissance vive*. Un ressort comprimé, un volume d'eau placé à une certaine hauteur, sont des puissances disponibles; un courant d'eau, un courant d'air sont des puissances vives.

La puissance se distingue essentiellement de la force en ce qu'elle se consomme et se dépense, en donnant naissance à certains effets; tandis que la force subsiste tant que dure l'action qui la produit.

Par exemple, on monte une horloge de clocher en soulevant un poids à une certaine hauteur. Le poids ainsi soulevé imprime en descendant le mouvement à l'horloge; mais quand ce poids est arrivé au bas de sa course, le mouvement s'arrête, la puissance dont on disposait est consommée; il faut remonter le poids, si l'on veut que le mouvement continue. Au contraire, le poids dont on charge des corps que l'on veut presser peut être abandonné à lui-même et continuer d'agir de la même manière pendant un temps indéfini, parce qu'il ne cesse pas d'être sollicité par la pesanteur.

De l'air comprimé exerce contre les parois de l'enveloppe qui le contient une pression dont rien ne limite la durée; mais si les parois cèdent, l'air, par son expansion successive, dépensera graduellement la puissance qu'il recélait, et que l'on ne peut lui rendre qu'en le soumettant à une nouvelle compression.

Il importe de remarquer que toutes les fois qu'il se consomme de la puissance, il se produit une autre puissance équivalente. Souvent cette nouvelle puissance n'est point apparente, mais elle n'en existe pas moins, et il n'y a jamais dépense de puissance sans restitution.

Ainsi, dans le second exemple dont on vient de parler, si l'on emploie la détente de l'air à mettre en jeu une pompe qui remonte un poids d'eau à une certaine hauteur, on pourra utiliser la chute de cette eau pour faire marcher une machine destinée à comprimer l'air. Si les machines qu'on emploie n'étaient sujettes à aucune perte de puissance, on devrait obtenir à la fin de ce cercle de transformations l'air comprimé au même degré qu'au commencement, de manière que la quantité de puissance initiale resterait constante à travers toutes ses transformations.

Cette reproduction complète de la puissance semble souvent ne pas avoir lieu, parce qu'une partie de la puissance disparaît en chemin pour reparaître sous une autre forme. Ainsi, les chocs, les frottements, la résistance de l'air, etc., sont autant de causes qui détruisent en apparence une portion plus ou moins grande de la puissance; mais ces résistances donnent naissance à une quantité de chaleur qui pourrait à son tour se convertir en travail mécanique, et qui représente virtuellement la puissance qui paraît avoir été perdue.

Il en faut dire autant de tous les déchets qu'éprouvent en apparence les puissances de quelque espèce qu'elles soient.

Dans le cas de l'horloge que nous avons cité, tout le travail moteur, toute la puissance emmagasinée en montant l'horloge, se transforme en chaleur dans le mouvement des rouages dont elle est composée. Si l'on pouvait s'emparer de cette chaleur qui se développe successivement,

et l'employer sans perte à soulever un poids, on parviendrait à remonter l'horloge.

Il est bon de remarquer que la quantité de chaleur que le mouvement de l'horloge engendre, et qui se dissipe dans les corps environnants, est précisément égale à la quantité de chaleur qui, par suite du travail développé, a disparu dans le corps de l'homme qui a monté l'horloge, chaleur qu'il a tirée de la combustion des aliments dont il s'est nourri.

Depuis fort longtemps, il s'est trouvé des penseurs disposés à croire que la puissance doit être regardée comme indestructible et invariable à l'égal de la matière. DESCARTES avait entrevu que, malgré les chocs innombrables des corps d'un système, et les distributions inégales de mouvement qui se font sans cesse des uns aux autres, il devait y avoir au fond de tout cela quelque chose de constant, de perpétuel; et il a cru que c'était la quantité de mouvement dont la mesure est le produit de la masse par la vitesse. Au lieu de cette quantité de mouvement, LEIBNITZ mettait la force vive, dont la mesure est le produit de la masse par le carré de la vitesse.

Ni le principe de DESCARTES ni celui de LEIBNITZ ne sont exacts, au moins dans les termes dans lesquels on les énonçait. Pour s'en convaincre, considérons deux corps animés de vitesses inversement proportionnelles à leurs masses, venant à la rencontre l'un de l'autre, et dont l'un puisse s'enfoncer dans l'autre, de manière à y rester réuni; considérons, par exemple, une balle lancée par un fusil et un bloc de bois, venant directement à la rencontre l'un de l'autre avec des vitesses réciproques à leurs masses; supposons que les deux corps ne soient soumis à aucune force extérieure, et qu'ils ne reçoivent ainsi que les actions qui résultent de leur choc, nous savons que par le choc les deux corps seront réduits au repos.

Voilà donc un système livré à lui-même dans lequel la quantité de mouvement est annulée par les seules réactions entre les parties dont il est composé. Donc, le principe de DESCARTES se trouve dans ce cas en défaut.

Il en est de même du principe de LEIBNITZ, puisque la force vive est également nulle après le choc des deux corps.

Dans l'expérience que nous venons de considérer, il se passe un fait auquel ni DESCARTES ni LEIBNITZ n'ont pris garde, et qui consiste en ce qu'après le choc il apparaît une chose qui n'existait pas avant, et qui doit être regardée comme l'équivalent de la puissance vive qui a disparu.

Cette chose, c'est la chaleur qui se développe par l'effet du choc.

Que l'on répète l'expérience avec toutes sortes de vitesses et de masses, toujours on verra que la quantité de chaleur qui se produit est proportionnelle à la puissance vive perdue.

Si cette chaleur était recueillie et utilisée dans une machine thermique parfaite, elle pourrait restituer intégralement la puissance qui a disparu; de sorte qu'en tenant compte de cette chaleur, on peut dire que la puissance totale n'éprouve aucune perte.

Il était réservé à notre siècle de découvrir que toutes les fois qu'il disparaît de la puissance mécanique, soit par les chocs, soit par les frottements, une quantité de chaleur équivalente fait son apparition; et *vice versa*, que toutes les fois que de la chaleur disparaît, elle donne naissance à un travail mécanique ou à une puissance équivalente. Ainsi, la puissance mécanique peut se transformer en chaleur, et réciproquement la chaleur peut se transformer en puissance mécanique.

La chaleur est donc une puissance comparable à la puissance mécanique.

On a reconnu qu'une transformation analogue peut avoir lieu entre tous les agents physiques qu'on nommait jadis fluides impondérables, c'est-à-dire entre la chaleur, l'électricité, le magnétisme, la lumière : de sorte qu'on a été conduit à poser en principe que TOUTES LES PUISSANCES NATURELLES PEUVENT SE CONVERTIR LES UNES DANS LES AUTRES SUIVANT DES RAPPORTS FIXES.

Ce principe étant admis comme un fait expérimental, il en découle que LA SOMME DE TOUTES LES PUISSANCES D'UN SYSTÈME LIVRÉ À LUI-MÊME EST CONSTANTE. Nous entendons par SYSTÈME LIVRÉ À LUI-MÊME un système parfaitement isolé et ne recevant du dehors ni ne communiquant au dehors aucune puissance. En effet, la raison ne peut admettre que quelque chose puisse s'anéantir ou être tiré de rien.

Cette loi qui régit tous les phénomènes est d'une très-haute portée, et doit être regardée comme une des plus belles conquêtes de l'esprit humain dans notre siècle. C'est une généralisation du principe mécanique de la *conservation des forces vives* que HUYGHENS semble avoir aperçu le premier, et dont JEAN BERNOUILLI fit une loi de la nature, suivant laquelle la somme des forces vives de tous les corps d'un système est constante ; mais ce principe n'est pas général et ne subsiste plus dans le cas où, par l'action mutuelle des corps, il survient des changements brusques dans leurs vitesses, à moins que les corps ne soient parfaitement élastiques. On dit alors qu'il y a perte de force vive. Si l'on fait, dans ce cas, entrer en ligne de compte la chaleur engendrée, on compensera la perte apparente, et le principe subsistera dans toute sa généralité.

Donc en tenant compte non-seulement des mouvements sensibles et des forces mesurables au dynamomètre, mais

encore des puissances d'une autre nature, telles que la chaleur, l'électricité, le magnétisme, on reconnaîtra l'invariabilité de la somme de toutes les puissances d'un système livré à lui-même.

Ce principe est venu donner un appui à une opinion déjà ancienne, suivant laquelle la chaleur, l'électricité, etc., pourraient bien n'être qu'autant de modalités spéciales du mouvement des atomes de la matière.

En effet, si l'on regarde ces agents comme les effets produits par le mouvement des derniers atomes de la matière, on conçoit comment la puissance vive totale d'un système reste constante à travers toutes les transformations qui peuvent avoir lieu dans ses parties.

Poursuivant le même ordre d'idées, on a même tenté d'expliquer la gravitation universelle, la cohésion, l'affinité chimique, par le mouvement d'un éther remplissant l'espace.

Nous sommes conduits ainsi à ne voir dans la nature que matière et mouvement, chacun des deux étant indestructible, et produisant par une foule de métamorphoses tous les phénomènes de la nature.

Cette synthèse physique est très-séduisante et plaît à l'imagination par la facilité qu'elle lui donne de se représenter les phénomènes et leurs changements successifs. Mais il reste encore à connaître comment les choses se passent dans beaucoup de cas, par quel mécanisme s'accomplissent tels ou tels phénomènes spéciaux ; il reste enfin de grandes lacunes à remplir. C'est à les combler que doit tendre la physique moderne.

Nous sommes ainsi ramenés à l'*atomisme* professé par Démocrite, par Gassendi, par Descartes. Mais si ce n'était alors qu'un système philosophique à l'appui duquel on ne pouvait fournir aucune des preuves sérieuses que réclame

la science véritable, aujourd'hui c'est une hypothèse physique que beaucoup de faits sont venus étayer, et qui est bien près de devenir une vérité.

Selon cette manière de voir, ce que nous appelons *force* n'existerait pas dans la nature; la force serait simplement l'effet d'une transmission de mouvement. Nous serions ainsi délivrés de ces forces auxquelles certains physiciens attribuent je ne sais quelle existence spéciale, en les regardant comme des éléments constitutifs de l'univers.

Il nous reste à parler d'une signification du mot *force* dont les praticiens font continuellement usage lorsqu'ils disent: La *force d'un courant d'eau*, *d'une machine à vapeur*, *d'un cheval*, *d'un homme*.

Le temps n'intervient pas dans l'idée que nous avons du travail et en général de la puissance dans le sens que nous y avons attaché, mais il intervient nécessairement dans l'idée d'une source indéfinie de travail ou de puissance.

L'eau accumulée dans un réservoir à un certain niveau, d'où elle peut tomber au niveau inférieur, quand on veut l'utiliser comme moteur, nous donne l'idée d'un approvisionnement de travail: c'est une puissance disponible déterminée.

Un cours d'eau qui coule sans cesse nous donne l'idée d'une source indéfinie de travail. On sent la nécessité de comparer le travail que peut fournir ce cours d'eau à celui que peut fournir un autre cours d'eau. On y parvient en évaluant le nombre de kilogrammètres que chaque cours d'eau peut mettre à notre disposition dans une seconde de temps.

Afin de n'avoir pas à considérer de très-grands nombres, on est convenu d'appeler *force de cheval*, ou simplement *cheval-vapeur*, le travail de 75 kilogrammètres par seconde.

D'après notre définition de la force, l'expression de *force de cheval* est vicieuse, et il faut y substituer celle de *puissance de cheval*, qui répond d'ailleurs parfaitement à l'expression anglaise *horsepower*.

La dénomination de *force* ne convient pas non plus pour désigner un travail indéfiniment prolongé, et qui conserve des valeurs égales pendant des temps égaux. Nous pensons qu'il n'y a aucun inconvénient à nommer *puissance* cette quantité dans laquelle intervient le temps. En effet, les expressions *puissance d'une machine à vapeur*, *puissance d'un animal*, *puissance d'un cours d'eau*, supposent toujours qu'on évalue la puissance par le nombre de kilogrammes que ces moteurs peuvent élever à un mètre pendant l'unité de temps.

La considération des phénomènes manifestés par les êtres vivants a donné naissance à l'expression: *force vitale*. C'est le principe qui préside aux fonctions des corps organisés vivants. Les uns le considèrent comme indépendant de l'organisme, les autres comme résultant de l'organisation même.

Nous nous garderons bien de nous engager dans la question scabreuse de savoir si la force vitale est ou n'est pas une entité distincte ; nous ferons seulement observer que, quel que soit le principe de la vie, il ne peut intervenir qu'en mettant en jeu les puissances physiques du corps sans y ajouter un contingent de puissance. En effet, on ne saurait concevoir qu'un être organisé, faisant partie d'un système livré à lui-même et soustrait à toute action extérieure, pût par sa seule volonté augmenter ou diminuer la quantité totale de puissance contenue dans le système. Ce qu'on appelle *force vitale* ne se manifeste jamais qu'en donnant naissance à des forces égales et contraires deux à deux, entre les éléments matériels de nos organes. « D'où

« il résulte qu'un animal, de quelque manière qu'il s'y « prenne, ne peut jamais déplacer son centre de gravité par « sa seule volonté et sans le secours d'un point d'appui « extérieur. L'homme et les animaux peuvent élever ou « abaisser verticalement leur centre de gravité en s'ap- « puyant sur la terre; ils peuvent aussi s'avancer horizonta- « lement à l'aide du frottement contre sa surface; mais la « locomotion leur serait impossible sur un plan parfaitement « poli, où cette résistance serait tout à fait insensible (*). »

Un homme ne pourrait pas non plus s'imprimer une rotation d'ensemble autour de la verticale passant par son centre de gravité, s'il était placé sur un plan horizontal parfaitement poli: car il ne peut se procurer un tel mouvement qu'en empruntant des forces au sol à l'aide du frottement.

Nous devons en conclure que le mot *force*, dans l'expression: *force vitale*, n'a aucune des significations dont s'occupe la mécanique; il n'a plus qu'un sens métaphorique, comme dans une foule d'autres phrases où ce mot a été transporté du propre au figuré.

III.

Il résulte de tout ce qui précède qu'en laissant de côté les sens métaphoriques, le mot *force* reçoit deux acceptions principales: celle d'une pression ou tension, et celle d'une capacité de travail.

Pour acquérir une idée nette des deux sens divers qu'on

(*) Poisson, *Traité de mécanique*, t. II, p. 451.

attache au mot *force*, nous n'avons qu'à nous représenter une masse d'air comprimé. Cet air exerce sur les parois du réservoir qui le contient une pression : voilà le premier sens. En laissant dilater cet air, on peut soulever un poids à une certaine hauteur, ou encore, si l'on veut, imprimer une certaine vitesse à un corps, comme on le fait dans un fusil à vent : voilà pour la seconde signification du mot *force*.

Pour éviter toute équivoque, nous restreignons la signification du mot *force* à indiquer uniquement la pression, et nous nommons *puissance* la faculté de produire un certain travail ou d'imprimer une certaine vitesse. La force s'exprime en kilogrammes ; la puissance s'exprime en kilogrammètres.

La puissance se divise en *puissance disponible* et en *puissance vive*.

Un poids reposant sur un plan horizontal, exerce contre le plan une force exprimable en kilogrammes. Le même poids, placé à une certaine distance au-dessus du plan sur lequel il peut tomber, représente une puissance disponible exprimable en kilogrammètres. Si on laisse tomber ce corps, il acquerra au bas de sa course une certaine puissance vive, égale à la moitié du produit de la masse par le carré de la vitesse, et qui s'exprime de même en kilogrammètres. Le poids pourra, à l'aide de cette puissance vive, remonter à la même hauteur d'où il est tombé. Il suffit, pour cela, que le plan soit parfaitement élastique ainsi que le corps.

La force et la puissance, ainsi entendues, sont deux choses tout à fait distinctes et point comparables, de la même manière qu'une ligne n'est point comparable à une surface.

Cependant on compare quelquefois un poids tombant d'une certaine hauteur sur un corps, à une pression exercée sur ce même corps sans vitesse acquise. Mais alors on n'a égard qu'aux effets physiques que peuvent produire le choc et la

pression. On peut, par exemple, comparer le choc produit par un poids tombant d'une certaine hauteur sur une substance qu'il comprime au poids qui, posé sur cette substance, produirait la même compression. Mais ici encore le poids, sans vitesse acquise, descend d'une certaine hauteur pour produire la compression, de manière qu'il y a à la fois pression et chemin décrit, et par suite développement de travail.

Dans les deux cas, on a donc à considérer une suite de pressions qui se succèdent sans interruption quelconque, tout en produisant la déformation du corps. Ainsi, c'est réellement une puissance vive que l'on compare à un travail, et non un choc à une pression.

Il est de la plus grande importance de ne jamais confondre les forces avec les puissances. C'est faute de faire suffisamment attention à cette distinction que des personnes s'abandonnent quelquefois aux idées les plus chimériques.

Avec une très-petite force, on peut faire équilibre à une très-grande force, au moyen d'un point d'appui ; mais avec une puissance donnée, on ne pourra jamais obtenir une puissance plus grande, quelle que soit la machine qu'on emploie.

Lorsqu'une petite force fait équilibre à une grande force, ce n'est pas par la petite force que la grande est détruite, c'est par la résistance des points fixes. La petite force ne détruit réellement qu'une petite partie de la grande, et les obstacles font le reste.

Si Archimède avait eu un levier et un point fixe, comme il le demandait, ce n'est pas lui qui aurait soutenu le globe de la terre: c'est son point fixe. Tout son art aurait consisté, non à soutenir le globe, mais à le faire soutenir presque en totalité par le point fixe. Si, au contraire, il eût été question de faire naître un mouvement effectif, alors Archimède aurait été obligé de le tirer tout entier de

son propre fonds: aussi n'aurait-il pu être que fort petit, après un temps très-long.

En admettant que la densité moyenne de la terre soît cinq fois et demie celle de l'eau, et que le travail journalier, que peut fournir un homme agissant sur une manivelle, soit de 172 800 kilogrammètres, on trouve que, pour soulever à la hauteur d'un millimètre un poids égal au poids de la terre, il faut plus de 900 milliards de siècles: de sorte que, si Archimède était encore vivant et, s'il avait toujours travaillé pendant les vingt siècles qui nous séparent de lui, il n'aurait pas encore soulevé la terre de la quarante-cinq billionième partie d'un millimètre.

Nous nous résumerons en disant que, dans l'état actuel de la science, on est amené de plus en plus à ne voir dans la nature que matière et mouvement, tous les deux également indestructibles. Il faut d'après cela se figurer dans l'univers une quantité invariable d'atomes matériels animés de vitesses diverses, qui se groupent en systèmes pour former des molécules et des corps. De l'échange de mouvement entre les différentes masses, il naît des *forces* exprimables en kilogrammes. Ces forces agissant le long de certains chemins, servent d'intermédiaires pour transformer les *puissances vives* en *puissances disponibles* et *vice versa,* puissances qui s'évaluent en kilogrammètres.

Les forces sont transitoires, tandis que les puissances sont impérissables. La puissance totale d'un système livré à lui-même, et en général de l'univers entier est invariable et toujours égale à la somme de la puissance vive et de la puissance disponible, lesquelles, en variant sans cesse dans leurs proportions relatives, produisent tous les phénomènes de la nature.

L'AIR COMPRIMÉ.

L'AIR COMPRIMÉ.

PRÉFACE.

L'emploi de l'air comprimé a rendu possible la construction de tunnels d'une grande longueur à travers les plus hautes montagnes. Par le moyen de l'air comprimé, on peut transmettre au fond de la galerie le travail mécanique développé à l'extérieur, et en même temps renouveler l'air vicié par la respiration, par les lumières, par la poudre employée pour les mines.

La base de ce système est une machine destinée à comprimer l'air. Le compresseur à colonne d'eau de MM. Grandis, Grattoni et Sommeiller, bien qu'abandonné depuis et remplacé par un compresseur à piston liquide, analogue aux pompes foulantes, a été cependant la machine qui a fait décider l'entreprise du percement du tunnel entre Bardonnèche et Modane. Sans cet appareil qui permet d'obtenir

de l'air comprimé à de très-hautes pressions, il est probable que l'exécution d'un tunnel de plus de 12 kilomètres, traversant la chaîne principale des Alpes, aurait été retardée.

Nous avons publié, en 1863, une théorie de cette ingénieuse machine que nous reproduisons ici.

Au commencement, on se faisait des illusions sur l'emploi de l'air comprimé pour emmagasiner le travail. Dans le rapport de la Commission chargée d'examiner le projet de MM. Grandis, Grattoni et Sommeiller, on admet qu'on peut utiliser complétement par la détente tout le travail accumulé dans l'air au moyen de la compression; qu'on peut, par exemple, retirer d'un litre d'air comprimé à 6 atmosphères un travail de 111 kilogrammètres, parfaitement égal au travail nécessaire pour opérer la compression. C'est une illusion que l'expérience dément, et qui provenait de ce qu'on négligeait les phénomènes calorifiques qui se produisent lors des variations de pression de l'air.

La nouvelle Théorie mécanique de la chaleur est venue jeter une grande lumière sur ces questions; mais même avant, on aurait pu, à l'aide de la théorie donnée par Laplace dans le XII[e] livre de la *Mécanique céleste*, déterminer les variations de température qui surviennent dans une masse d'air par l'effet d'une condensation ou d'une dilatation subite, sans addition ni soustraction de chaleur. C'est ce que nous avons fait dans le premier des Mémoires qui suivent.

Dans le second, en laissant de côté l'appareil employé pour opérer la compression, nous nous occupons exclusivement de l'évaluation du travail mécanique dépensé dans la compression, et du travail restitué par la détente de l'air. Nous y faisons voir que la détente de l'air comprimé à 6 atmosphères ne rend que le 59 pour cent du travail employé à la compression.

On voit par là combien il importe de ne pas faire abstraction des phénomènes calorifiques dans l'emploi de l'air comprimé.

Turin, janvier 1874.

THÉORIE

DU COMPRESSEUR À COLONNE D'EAU

DE MM. GRANDIS, GRATTONI ET SOMMEILLER

et

APPLICATIONS AU COMPRESSEUR

qui fonctionne au percement des Alpes Cottiennes.

(*Annales des Mines*, Tome III, Paris, 1863).

DESCRIPTION SUCCINCTE
DU COMPRESSEUR À COLONNE D'EAU
ET DE SON JEU.

1. Le compresseur à colonne d'eau de MM. Grandis, Grattoni et Sommeiller est une machine qui a pour objet d'employer, sans intermédiaire, l'eau d'une chute, pour comprimer de l'air. Il se compose essentiellement d'un tuyau en forme de siphon, qui descend d'un réservoir à niveau constant *A* et se recourbe ensuite horizontalement pour se relever verticalement en *C*.

TRACÉ DÉMONSTRATIF

du

COMPRESSEUR À COLONNE D'EAU

DE MM. GRANDIS, GRATTONI ET SOMMEILLER.

LÉGENDE EXPLICATIVE.

A, réservoir de l'eau motrice.

B, tuyau descendant.

C, chambre de compression.

b, soupape d'alimentation.

d, soupape de décharge.

r, soupape de refoulement.

e, clapet d'aspiration.

f, *f'*, *f''*..., trous pour la sortie de l'air.

R, réservoir de l'air comprimé.

Vers le bas du tuyau descendant *B*, il y a une soupape *b* que nous nommerons *soupape d'alimentation.*

La capacité *C*, appelée *chambre de compression*, communique, au moyen d'une soupape *r*, *de refoulement*, s'ouvrant de bas en haut, avec un réservoir d'air, ou gazomètre *R* destiné à recueillir l'air comprimé, et dans lequel la pression de l'air est maintenue constante par un moyen quelconque, dont ce n'est point ici le lieu de s'occuper, et qui d'ailleurs varie suivant les circonstances.

Dans la partie horizontale du siphon, s'ouvre de bas en haut une soupape *d*, *de décharge*, pour donner issue à l'eau après le jeu de la machine; et en haut de la chambre de compression s'ouvre du dehors au dedans un clapet *e*, *d'aspiration* pour l'admission de l'air extérieur.

A partir du niveau *a* des soupapes d'alimentation et de décharge, il existe dans la paroi de la chambre de compression *C*, plusieurs trous *f*, *f'*, *f''*,... étagés jusqu'à une certaine hauteur. Ces trous sont fermés par des clapets pendants qui laissent passer l'air, lorsque la tête de la colonne liquide monte, en refoulant l'air devant elle; mais qui se ferment, dès que l'eau arrive jusqu'à eux.

Au commencement du jeu de la machine, l'eau remplit le tuyau descendant *B*, la partie horizontale, et monte jusqu'en *a*, au niveau des soupapes *b* et *d*. La capacité *C* est remplie d'air à la pression atmosphérique.

Voici maintenant comment la machine fonctionne. La soupape de décharge *d* étant fermée, si l'on ouvre la soupape d'alimentation *b*, l'eau monte dans la chambre *C* en chassant devant elle l'air qui sort par les trous *f*, *f'*, *f''*..... L'eau acquiert ainsi une vitesse finie. Lorsque la tête de la colonne liquide a dépassé le trou le plus élevé, l'air, ne pouvant plus s'écouler au dehors, se comprime à mesure que l'eau avance.

La colonne liquide continuant à s'avancer, il arrive un moment où la pression de l'air devenant égale et ensuite supérieure à celle du réservoir *R*, la soupape de refoulement *r* s'ouvre d'elle-même, et l'air comprimé est chassé de *C* dans le réservoir *R*.

Lorsque l'eau, en montant toujours, a perdu tout le mouvement qu'elle avait acquis, la soupape *r* se referme d'elle-même, et, à ce moment, la soupape de décharge *d* s'ouvrant, en même temps que la soupape d'alimentation *b* se ferme, l'eau contenue dans la chambre de compression *C* s'écoule par la soupape de décharge *d*, en cédant la place à l'air qui afflue par la soupape d'aspiration *e*.

La machine a ainsi achevé une *pulsation*, et se trouve disposée de manière à pouvoir en commencer une seconde, dès qu'on ouvrira la soupape d'alimentation.

Les mouvements des soupapes d'alimentation et de décharge, nécessaires pour le jeu de la machine, sont opérés par un régulateur. Les soupapes à air *r* et *e* s'ouvrent et se ferment d'elles-mêmes.

Nous devons ajouter que l'appareil est disposé de telle sorte que l'aire de la section des tuyaux est partout la même, que les soupapes n'opposent aucun obstacle à la libre circulation de l'eau, que l'embouchure du tuyau descendant est évasée de manière à éviter toute perte de force vive au passage d'une section à l'autre.

Il s'ensuit que les seules résistances que l'eau rencontre dans son mouvement, sont celles qui proviennent des frottements, et de son passage par les coudes que présentent les tuyaux.

2. Le jeu de la machine se divise naturellement en quatre périodes distinctes: la première commence quand la soupape d'alimentation est ouverte et finit à l'instant où l'eau

dépasse le trou latéral le plus élevé. Pendant cette période, l'eau acquiert de la vitesse, et par là elle emmagasine de la force vive.

La deuxième période commence à l'instant où la colonne liquide montante dépasse le trou latéral le plus élevé, et finit quand la soupape de refoulement s'ouvre d'elle-même; ce qui arrive au moment où la tension de l'air dans la chambre de compression égale la tension qui existe dans le réservoir. Pendant cette période la machine condense l'air contenu dans la chambre de compression, depuis la pression atmosphérique, jusqu'à la pression de l'air du réservoir.

La troisième période dure depuis l'ouverture de la soupape de refoulement, jusqu'à son occlusion qui a lieu lorsque la vitesse de la colonne liquide montante est complétement anéantie. Pendant cette période la machine est employée à faire passer l'air condensé de la chambre de compression dans le réservoir.

Nous devons faire remarquer que les dispositions de l'appareil sont telles, que l'eau arrive avec une vitesse nulle au sommet de la chambre de compression où la soupape de refoulement est placée. Cette disposition est la plus convenable pour tirer le plus grand parti possible de la machine: en effet, si la chambre de compression était plus élevée, il resterait dans celle-ci, après la fermeture de la soupape de refoulement, une portion d'air qui n'étant pas emmagasinée dans le réservoir d'air, se détendrait en pure perte lorsque la chambre de compression se vide d'eau. Au contraire, si la chambre de compression était plus courte, une partie de l'eau serait chassée dans le réservoir d'air, et absorberait par suite une partie du travail moteur de la chute d'eau.

La quatrième période du jeu de la machine dure depuis l'ouverture de la soupape de décharge jusqu'à sa fermeture, qui a lieu à l'instant où l'eau est sortie de la chambre de compression, en laissant sa place à l'air de l'atmosphère. Pendant la quatrième période de chaque pulsation, on prend à l'atmosphère une quantité constante d'air qu'on comprime et qu'on fait entrer dans le réservoir, durant la deuxième et la troisième période de la pulsation suivante.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU MOUVEMENT APPLICABLE AUX QUATRE PÉRIODES DU JEU DE LA MACHINE.

3. Si, dans chaque période du jeu de la machine, nous considérons le système formé de l'eau contenue dans les tuyaux qui est en mouvement, nous voyons que dans toutes les quatre périodes c'est toujours une masse liquide, variable d'un instant à l'autre, qui se meut sous l'action des forces suivantes: 1° le poids du liquide; 2° les deux pressions exercées contre les sections extrêmes du liquide; 3° la résistance provenant des frottements des particules liquides les unes sur les autres et contre la paroi du tuyau; 4° la résistance produite par le passage de l'eau par les coudes des tuyaux.

Dans la première période et dans la quatrième les deux surfaces extrêmes supportent la même pression, égale a celle de l'atmosphère. Dans la deuxième période, la section supérieure est pressée par l'atmosphère, et la section inférieure par la force élastique de l'air qu'on comprime.

Dans la troisième période, la pression contre la surface supérieure est encore égale à la pression atmosphérique, tandis que la pression contre la surface inférieure est égale à celle qui a lieu dans le réservoir d'air.

Il s'ensuit que les mêmes équations régissent le mouvement pendant les quatre périodes, en y modifiant convenablement les pressions extrêmes. Nous allons établir ces équations à l'aide du principe des forces vives, et en admettant l'hypothèse du parallélisme des tranches.

Concevons le liquide partagé en tranches infiniment minces par des plans perpendiculaires à l'axe du tuyau. Soient:

ω l'aire d'une section normale quelconque;

s la longueur de l'axe du tuyau depuis une origine fixe jusqu'à la section ω;

z la distance verticale du centre de gravité de la section ω au plan horizontal passant par l'origine;

u la vitesse, dans le sens de l'axe du tuyau, de la tranche élémentaire de fluide qui passe par la section ω au bout du temps t;

ω_0, s_0, z_0, u_0 les mêmes quantités relatives à la surface supérieure du liquide;

ω_1, s_1, z_1, u_1 les mêmes quantités relatives à la surface inférieure;

p_0, p_1 les pressions qui ont lieu contre les tranches extrêmes ω_0, ω_1, rapportées à l'unité de surface;

Ω l'aire d'une section déterminée du vase;

v la vitesse des molécules liquides à cette section Ω;

g la vitesse que la pesanteur imprime aux corps pendant l'unité de temps;

Π le poids du mètre cube d'eau.

Suivant l'hypothèse du parallélisme des tranches, on admet que les tranches infiniment minces normales à l'axe

du tuyau, dans lesquelles le fluide est partagé, se meuvent normalement à l'axe, comme si elles étaient d'une seule pièce, et se modèlent successivement sur les sections du vase qu'elles traversent, en prenant à chaque instant une vitesse qui fasse passer, dans un élément du temps, la même quantité de liquide à travers chaque section normale.

Les quantités de liquide qui passent par les sections ω, ω_0, ω_1, Ω, pendant le temps dt, sont:

$$\omega u dt, \qquad \omega_0 u_0 dt, \qquad \omega_1 u_1 dt, \qquad \Omega v dt;$$

on aura donc

$$\omega u = \omega_0 u_0 = \omega_1 u_1 = \Omega v;$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{\Omega v}{\omega}, \qquad u_0 = \frac{\Omega v}{\omega_0}, \qquad u_1 = \frac{\Omega v}{\omega_1}.$$

Il résulte de là que le mouvement du liquide sera entièrement déterminé, si l'on connaît à chaque instant la valeur de la vitesse v pour une section déterminée Ω du vase.

Cela posé, dans le problème qui nous occupe, les forces mouvantes sont: le poids du fluide et la pression p_0 à la surface supérieure; les forces résistantes sont: la pression p_1 sur la surface inférieure, et en outre les frottements et la résistance au passage des coudes.

Le travail de la pesanteur sur la tranche élémentaire de volume ωds, pendant le temps dt sera

$$\pi \omega ds \cos \varphi . u dt,$$

où φ désigne l'angle formé par l'élément de l'axe du tuyau avec la verticale. Comme

$$ds \cos \varphi = dz ,$$

le travail ci-dessus deviendra

$$\pi \omega dz u dt = \pi \Omega v dz dt .$$

Le travail total du poids de toutes les tranches comprises entre les sections extrêmes ω_0 et ω_1, dans l'élément de temps dt, sera

$$\pi \Omega v dt \int_{z_0}^{z_1} dz = \pi (z_1 - z_0) \Omega v dt .$$

Pendant le même temps dt, le travail de la pression totale $p_0 \omega_0$, sur la section ω_0, est

$$p_0 \omega_0 u_0 dt = p_0 \Omega v dt .$$

Nous avons donc pour le travail moteur total, pendant le temps dt,

$$T_m = \left[\pi (z_1 - z_0) + p_0\right] \Omega v dt .$$

Le travail résistant, dû à la pression $p_1 \omega_1$, sur la section qui termine le volume liquide en mouvement, pendant l'élément du temps, sera

$$p_1 \omega_1 u_1 dt = p_1 \Omega v dt .$$

Nous admettrons que la résistance produite par la viscosité de l'eau et son frottement contre la paroi, est proportionnelle à la surface mouillée et au carré de la vitesse de l'eau, et nous la représenterons par

$$\frac{\Pi}{g}\alpha\chi u^2 ds\,,$$

où χ est le contour de la section droite du tuyau, α un coefficient donné par l'expérience. D'après Eytelwein

$$\alpha = 0{,}0035.$$

Le travail de cette résistance, pendant le temps dt, sera, pour chaque tranche,

$$\frac{\Pi}{g}\alpha\chi u^2 ds\,.\,u\,dt = \frac{\Pi}{g}\alpha\Omega^3 v^3 \frac{\chi ds}{\omega^3}\,dt\,,$$

et, pour la portion de liquide comprise entre les tranches extrêmes ω_0 et ω_1,

$$\frac{\Pi}{g}\alpha\Omega^3 v^3 dt \int_{s_0}^{s_1} \frac{\chi ds}{\omega^3}.$$

Quant à la résistance provenant du passage de l'eau par un coude, nous admettrons qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse et à la fonction

$$\frac{\Pi}{2g} O\,(0{,}0039 + 0{,}0186\,.\,r)\,\frac{C}{r^2}\,,$$

dans laquelle O désigne l'aire de la section du tuyau à l'endroit du coude; r le rayon de l'arc de cercle qui réunit les axes des deux parties du tuyau; C la longueur de cet arc.

Si nous posons

$$(0{,}0039 + 0{,}0186 \,.\, r)\,\frac{C}{2r^2} = \beta\,,$$

nous aurons, pour représenter la résistance produite par un coude, l'expression

$$\frac{\Pi}{g}\,\beta\,O\,U^2\,.$$

U étant la vitesse du liquide à la section O; en sorte qu'on aura

$$O\,U = \Omega\,v.$$

Le travail résistant, pendant le temps dt, dû au passage de l'eau par un coude, sera

$$\frac{\Pi}{g}\,\beta\,O\,U^2\,.\,U\,dt = \frac{\Pi}{g}\,\Omega^3 v^3\,\frac{\beta}{O^2}\,dt\,;$$

et le travail résistant dû à plusieurs coudes,

$$\frac{\Pi}{g}\,\Omega^3 v^3\,dt \sum \frac{\beta}{O^2}\,,$$

où l'on désigne par $\sum$ la somme faite pour tous les coudes qui existent dans l'appareil.

Le travail résistant total sera donc

$$T_r = \left(p_1 + \frac{\Pi}{g}\,\alpha\,\Omega^2 v^2 \int_{s_0}^{s_1} \frac{\chi\,ds}{\omega^3} + \frac{\Pi}{g}\,\Omega^2 v^2 \sum \frac{\beta}{O^2}\right)\Omega\,v\,dt\,,$$

et l'excès du travail moteur sur le travail résistant, pendant le temps dt,

$$T_m - T_r = \left[z_1 - z_0 + \frac{p_0 - p_1}{\Pi} - \alpha \Omega^2 \frac{v^2}{g} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\chi ds}{\omega^3} - \Omega^2 \frac{v^2}{g} \sum \frac{\beta}{O^2} \right] \Pi \Omega v \, dt.$$

Conformément au principe des forces vives, cet excès du travail moteur sur le travail résistant, pendant le temps dt, est égal à l'accroissement de la demi-somme des forces vives de toutes les parties du système pendant le même temps dt.

Nous allons déterminer cet accroissement.

La force vive de la tranche quelconque ω, au bout du temps t, est

$$\frac{\Pi}{g} \omega ds \, . \, u^2 = \frac{\Pi}{g} \Omega^2 v^2 \frac{ds}{\omega}.$$

Donc la force vive totale du fluide compris entre les sections extrêmes ω_0, ω_1, sera

$$\frac{\Pi}{g} \Omega^2 v^2 \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega}.$$

La force vive acquise par le fluide, pendant l'élément du temps dt, sera la différentielle de cette valeur prise par rapport à t; elle sera donc

$$2 \frac{\Pi}{g} \Omega^2 v \frac{dv}{dt} dt \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega} + \frac{\Pi}{g} \Omega^2 v^2 dt \frac{d.}{dt} \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega}.$$

L'aire ω d'une section du vase est donnée, dans chaque cas, en fonction de s, il s'ensuit que l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{ds}{\omega}$$

est une fonction de s, que nous désignerons par $F(s)$; de sorte que nous aurons

$$\int \frac{ds}{\omega} = F(s),$$

et

$$\frac{1}{\omega} = F'(s).$$

Par conséquent, nous aurons

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega} = F(s_1) - F(s_0).$$

En différentiant par rapport à t, il vient

$$\frac{d.}{dt}\int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega} = \frac{ds_1}{dt} F'(s_1) - \frac{ds_0}{dt} F'(s_0).$$

Or nous avons

$$F'(s_1) = \frac{1}{\omega_1}, \qquad F'(s_0) = \frac{1}{\omega_0},$$

$$\frac{ds_1}{dt} = u_1, \qquad \frac{ds_0}{dt} = u_0,$$

et

$$u_1 = \frac{\Omega v}{\omega_1}, \qquad u_0 = \frac{\Omega v}{\omega_0};$$

il vient donc

$$\frac{d.}{dt}\int_{s_0}^{s_1}\frac{ds}{\omega} = \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right)\Omega v.$$

Par conséquent, l'accroissement de force vive, pendant le temps dt, sera exprimé par

$$2\frac{\Pi}{g}\Omega^2 v\,dt\,\frac{dv}{dt}\int_{s_0}^{s_1}\frac{ds}{\omega} + \frac{\Pi}{g}\Omega v^3 dt\left(\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right).$$

On en conclut, pour l'équation du mouvement du fluide, en divisant par $\Pi\Omega v\,dt$,

$$\frac{\Omega}{g}\frac{dv}{dt}\int_{s_0}^{s_1}\frac{ds}{\omega} + \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\Omega^2}{\omega_1^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) - (z_1 - z_0) - \frac{p_0 - p_1}{\Pi}$$
$$+ \alpha\Omega^2\frac{v^2}{g}\int_{s_0}^{s_1}\frac{\chi\,ds}{\omega^2} + \Omega^2\frac{v^2}{g}\sum\frac{\beta}{O^2} = 0.$$

Si, pour plus de simplicité, on prend pour la section Ω, à laquelle se rapporte la vitesse v, la section qui forme l'extrémité inférieure du liquide, et si l'on nomme y la hauteur due à la vitesse v, c'est-à-dire si l'on pose

$$\Omega = \omega_1,$$

et

$$\frac{v^2}{2g} = y,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}=\frac{dy}{vdt}=\frac{dy}{ds_1},$$

on aura

$$[1]\qquad \Omega\frac{dy}{ds_1}\int_{s_0}^{s_1}\frac{ds}{\omega}+y\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)-(z_1-z_0)-\frac{p_0-p_1}{\Pi}$$
$$+2\alpha\Omega^2 y\int_{s_0}^{s_1}\frac{\chi ds}{\omega^2}+\Omega^2 y\sum\frac{2\beta}{O^2}=0.$$

Telle est l'équation générale du mouvement d'un liquide qui coule dans un vase, en ayant égard aux résistances provenant des frottements et des coudes.

Première période.

4. Dans la première période, ainsi que dans la deuxième et la troisième, nous avons à considérer un vase composé d'une partie prismatique verticale, ouverte par le haut, entretenue à un niveau constant, et d'une autre partie cylindrique courbe, formant le prolongement inférieur de la première, où l'eau s'avance progressivement.

Le renouvellement du fluide à l'extrémité supérieure du vase est supposé s'opérer par l'addition de nouvelles tranches ayant les mêmes vitesses que celles qu'elles remplacent.

Soient:

λ la hauteur du réservoir supérieur;

λ' la longueur de l'axe du tuyau, depuis la partie inférieure de λ jusqu'au niveau a;

l la hauteur de la chambre de compression, depuis le niveau a, jusqu'à la soupape de refoulement;

A l'aire de la section horizontale du réservoir supérieur;

Ω l'aire de la section constante du tuyau;

c le périmètre de la section A;

D le diamètre du tuyau dans sa partie cylindrique;

H la hauteur du niveau supérieur au-dessus de la soupape de décharge, ou la hauteur de la chute;

h la hauteur de la colonne d'eau qui fait équilibre à la pression atmosphérique;

n la pression intérieure qui a lieu dans le réservoir ou gazomètre, mesurée en atmosphères;

x la hauteur variable de la section extrême de la colonne liquide montante au-dessus du niveau a, au bout du temps t.

En plaçant l'origine des longueurs s ainsi que la section ω_0 à la surface supérieure du liquide, nous aurons

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, & s_1 &= \lambda + \lambda' + x, \\ z_0 &= 0, & z_1 &= H - x, \\ \omega_0 &= A, & O &= \Omega, \end{aligned}$$

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\omega} = \frac{\lambda}{A} + \frac{\lambda' + x}{\Omega};$$

la chambre de compression étant cylindrique, on aura

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\chi ds}{\omega^2} = \int_{\lambda}^{\lambda+\lambda'} \frac{\chi ds}{\omega^2} + \frac{c\lambda}{A^3} + \frac{4x}{\Omega^2 D};$$

de sorte qu'en faisant, pour abréger,

$$\lambda \frac{\Omega}{A} + \lambda' = L,$$

$$\frac{8a}{D} = \delta,$$

$$1-\frac{\Omega^2}{A^2}+2\alpha\Omega^2\int_{\lambda}^{\lambda+\lambda'}\frac{\chi\,ds}{\omega^3}+2\alpha\lambda\,\frac{c\,\Omega^2}{A^3}+\sum 2\beta-aL=b,$$

l'équation [1] du mouvement deviendra

$$[2]\qquad (L+x)\,dy+by\,dx+a\,(L+x)\,y\,dx - \left(H-x+\frac{p_0-p_1}{\varpi}\right)dx=0.$$

Telle est l'équation du mouvement pendant la première période, ainsi que pendant la deuxième et la troisième.

Nous ferons remarquer, avant d'aller plus loin, que si le vase où se meut le liquide était cylindrique dans toute sa longueur, on aurait

$$A=\Omega=\frac{\pi D^2}{4},$$

$$\chi=c=\pi D,$$

$$\int_{\lambda}^{\lambda+\lambda'}\frac{\chi\,ds}{\omega^3}=\frac{\lambda' c}{\Omega^3}=\frac{4\lambda'}{\Omega^2 D};$$

et par suite

$$\lambda+\lambda'=L,$$

$$\frac{8\alpha}{D}=a,$$

$$\sum 2\beta=b.$$

Alors L serait la longueur totale du tuyau, depuis la surface supérieure du liquide jusqu'à sa surface inférieure.

Pendant la première période, les deux surfaces extrêmes du liquide en mouvement ne supportent d'autre pression que celle de l'atmosphère. Nous aurons donc

$$p_0 = p_1 = \varpi h ;$$

de sorte que l'équation [2] du mouvement deviendra

$$(L+x)\,dy + by\,dx + a\,(L+x)\,y\,dx - (H-x)\,dx = 0;$$

c'est une équation linéaire dont l'intégrale s'obtient, comme l'on sait, sous une forme finie.

Pour l'intégrer, multiplions par

$$(L+x)^{b-1}\,e^{ax},$$

e étant la base des logarithmes hyperboliques, il vient

$$(L+x)^b\,e^{ax}\,dy + b\,(L+x)^{b-1}\,e^{ax}y\,dx + a\,(L+x)^b\,e^{ax}y\,dx - (H-x)\,(L+x)^{b-1}\,e^{ax}\,dx = 0.$$

En intégrant, on obtient

$$(L+x)^b\,e^{ax}y - \int (H-x)\,(L+x)^{b-1}\,e^{ax}\,dx = \text{constante}.$$

La constante se détermine par la condition qu'on ait en même temps $x=0$ et $y=0$; d'où il résulte

$$(L+x)^b\,e^{ax}y - \int_0^x (H-x)\,(L+x)^{b-1}\,e^{ax}\,dx = 0 ;$$

ce qui fait connaître la vitesse acquise par la tête de la colonne liquide, à une distance quelconque x de son point de départ.

La valeur de y étant connue en fonction de x, l'équation

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2gy},$$

donnera ensuite

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2gy}};$$

d'où l'on tire

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2gy}}.$$

On obtiendra donc ainsi les relations cherchées entre les quantités y, t et x.

Si l'on désigne par x_0 la hauteur où l'eau monte dans la branche courte du siphon pendant qu'elle est en communication avec l'atmosphère, ou, en d'autres termes, la hauteur du bord supérieur du trou latéral le plus élevé, et si l'on désigne par y_0 la valeur de y correspondante à cette valeur de $x = x_0$, nous aurons

$$(L + x_0)^b e^{ax_0} y_0 - \int_0^{x_0} (H - x)(L + x)^{b-1} e^{ax} dx = 0,$$

$$t_0 \sqrt{2g} = \int_0^{x_0} \frac{(L + x)^{\frac{b}{2}} e^{\frac{ax}{2}} dx}{\sqrt{\int_0^x (H - x)(L + x)^{b-1} e^{ax} dx}},$$

pour déterminer la hauteur due à la vitesse de la tranche extrême de la colonne liquide, au bout de la première période, et la durée de cette période.

Deuxième période.

5. Pendant la deuxième période, la pression qui a lieu sur la surface supérieure du liquide est constante et égale à la pression atmosphérique, c'est-à-dire qu'on a

$$p_0 = \Pi h.$$

Celle qui a lieu sur la surface inférieure est égale à la force élastique de l'air contenu dans la chambre de compression.

Or la colonne liquide étant montée de la quantité x, l'air confiné dans la chambre passe du volume primitif

$$(l - x_0)\,\Omega\,,$$

au volume

$$(l - x)\,\Omega.$$

Si la variation de volume s'opérait sans changement de température, la pression de l'air passerait, d'après la loi de Mariotte, de la valeur initiale

$$\Pi h$$

à la valeur

$$\Pi h \left(\frac{l - x_0}{l - x}\right).$$

Mais on sait que la condensation d'une masse d'air dégage de la chaleur, et qu'au contraire la dilatation d'une masse d'air en absorbe. La loi de Mariotte n'est exacte qu'à la condition que la chaleur dégagée par la compression soit absorbée entièrement par les corps environnants à mesure qu'elle se produit; ce qui exige que la condensation soit

opérée très-lentement. Mais si la condensation est subite, comme dans le cas qui nous occupe, l'élévation de température qui se produit dans les molécules de l'air, n'ayant pas le temps de se dissiper, en augmente le ressort.

Si l'on suppose que l'air se condense sans addition ni soustraction externe de chaleur, d'après la théorie de Laplace, comme d'après la théorie mécanique moderne de la chaleur, la loi de la compression de l'air est donnée par les formules

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{V}{V'}\right)^k,$$

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{V}{V'}\right)^{k-1} = \left(\frac{P'}{P}\right)^{1-\frac{1}{k}},$$

où P, V et T désignent la pression, le volume et la température [comptée du zéro absolu (estimé à $-274°$ C.)] de l'air avant la compression; P', V' et T' la pression, le volume et la température [comptée du zéro absolu] de l'air après la compression; k le rapport de la capacité calorifique de l'air *sous pression constante* à la capacité *sous volume constant*.

Remarquons que pour passer du cas où l'air ne reçoit du dehors ni ne perd de chaleur au cas où la température reste constante, il suffit de faire

$$k = 1,$$

dans les formules précédentes.

Cela posé, la pression qui aura lieu sur la tête de la colonne liquide qui s'est avancée de la quantité x sera

$$p_1 = \Pi h \left(\frac{l - x_0}{l - x}\right)^k,$$

lorsque la totalité de la chaleur produite reste dans l'air, ce qui a lieu à peu près dans notre cas.

En introduisant dans l'équation E les valeurs précédentes des pressions extrêmes, nous obtiendrons

$$(L-x)\,dy - by\,dx - a(L-x)\,y\,dx$$
$$-\left[H-h-x-h\left(\frac{l-x_0}{l-x}\right)^k\right]dx=0.$$

En intégrant, comme ci-dessus, et déterminant la constante de manière que l'on ait $y=y_0$ quand $x=x_0$, on trouve

$$(L-x)^b e^{ax}y - (L-x_0)^b e^{ax_0}y_0$$
$$-\int_{x_0}^{x}\left[H-h-x-h\left(\frac{l-x_0}{l-x}\right)^k\right](L-x)^{b-1}e^{ax}\,dx=0.$$

La valeur de y étant ainsi connue en fonction de x, le temps employé par l'eau à monter, depuis la hauteur x_0, jusqu'à la hauteur x, au-dessus de son niveau primitif, sera donné par la formule

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{2gy}}.$$

La soupape de refoulement s'ouvre, et par suite la seconde période finit, quand le volume de l'air a été assez réduit pour que l'air ait acquis la tension de celui qui est renfermé dans le réservoir.

Soit alors x_1 la valeur que prend x; on aura, pour déterminer x_1, l'équation

$$\left(\frac{l-x_0}{l-x_1}\right)^k=n,$$

d'où l'on tire

$$x_1 = l - \frac{l - x_0}{\frac{1}{n^k}}.$$

En substituant cette valeur de x_1, au lieu de x, dans les expressions de y et de t, on aura la hauteur due à la vitesse de la section extrême de l'eau, et le temps, qui répondent à la fin de la deuxième période.

Troisième période.

6. Le mouvement de la machine, pendant la troisième période, est encore régi par l'équation [2] de l'art. 4. La pression sur la surface supérieure du liquide est toujours

$$p_0 = \Pi h ;$$

mais la pression sur la surface inférieure est égale à celle qui a lieu dans le réservoir d'air, savoir n atmosphères. Par conséquent

$$p_1 = n\Pi h.$$

On aura donc, pour l'équation du mouvement pendant cette période,

$$(L+x)\,dy + by\,dx + a(L+x)y\,dx + (nh - h - H + x)\,dx = 0.$$

Intégrant cette équation, de sorte qu'on ait $y = y_1$ quand $x = x_1$, on trouve

$$(L+x)^b e^{ax} y - (L+x_1)^b e^{ax_1} y_1 + \int_{x_1}^{x} (nh - h - H + x)\,(L+x)^{b-1} e^{ax}\,dx = 0 ;$$

ce qui donne la hauteur y due à la vitesse de la section extrême de la colonne montante, en un point quelconque de sa course, pendant la troisième période du mouvement.

Le temps, à partir de la fin de la période précédente, sera donné par la formule

$$t = \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2gy}},$$

où il faudra introduire la valeur de y en x, tirée de l'équation précédente.

A la fin de la troisième période, on a, en même temps, $x = l$ et $v = 0$ et par suite $y = 0$; on aura donc

$$(L+x_1)^b e^{ax_1} y_1 - \int_{x_1}^{l} (nh - h - H + x)(L+x)^{b-1} e^{ax}\, dx = 0,$$

ou bien, en remplaçant y_1 et y_0 par leurs valeurs trouvées dans les articles précédents, et décomposant les intégrales,

$$H\int_0^l (L+x)^{b-1} e^{ax}\, dx - \int_0^l x\,(L+x)^{b-1} e^{ax}\, dx$$
$$- nh\int_{x_1}^{l} (L+x)^{b-1} e^{ax}\, dx + h\int_{x_0}^{l} (L+x)^{b-1} e^{ax}\, dx$$
$$- h\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{l-x_0}{l-x}\right)^k (L+x)^{b-1} e^{ax}\, dx = 0.$$

En joignant à cette équation celle qui établit une relation entre x_1 et l, savoir

$$\left(\frac{l-x_0}{l-x_1}\right)^k = n,$$

on aura deux équations entre les quantités H, l, x_0, x_1, n, au moyen desquelles trois de ces quantités étant données, on trouvera les deux autres.

Quatrième période.

7. Après la perte du mouvement de l'eau contenue dans l'appareil, la soupape de refoulement se ferme d'elle-même; en même temps le régulateur ouvre la soupape de décharge pour vider d'eau la chambre de compression. Alors le poids de l'atmosphère fait ouvrir la soupape d'aspiration, et l'air vient prendre la place de l'eau à mesure que celle-ci sort de l'appareil.

Nous admettrons que la pression de l'air dans l'intérieur de la chambre de compression, pendant la vidange, est égale à la pression extérieure de l'atmosphère.

Le mouvement du liquide, durant cette quatrième période, sera encore donné par l'équation [1] de l'art. 3.

En plaçant l'origine des s au sommet de la chambre de compression, la section ω_0 à la section supérieure qui s'abaisse progressivement, désignant par l' la longueur développée du tuyau de a en d, et nommant toujours x la hauteur variable de la tête de la colonne liquide au-dessus du niveau a, nous avons ici

$$s_0 = l - x, \qquad s_1 = l + l', \qquad \omega_0 = \Omega,$$

$$z_0 = l - x, \qquad z_1 = l, \qquad p_0 = p_1.$$

De plus, on doit remplacer

$$\frac{dy}{ds_1}$$

par

$$\frac{dy}{ds_0} = -\frac{dy}{dx}.$$

Par conséquent, on aura

$$\Omega \frac{dy}{dx}\int_{l-x}^{l+l'} \frac{ds}{\omega} + x - 2\alpha\Omega^2 y \int_{l-x}^{l+l'} \frac{x\,ds}{\omega^3} - \Omega^2 y \sum \frac{2\beta}{O^2} = 0.$$

La dernière période se calcule donc, comme les précédentes, par une équation linéaire qu'on sait intégrer.

Le temps sera donné par l'intégrale

$$t = \int_{l-x}^{l} \frac{dx}{\sqrt{2gy}}.$$

Simplification des équations du mouvement.

8. L'analyse précédente nous a conduit à l'expression de la vitesse de la colonne ascendante en un point quelconque de sa course, ainsi qu'à l'expression du temps nécessaire pour parvenir à ce point, au moyen d'intégrales définies. Un problème qui est ainsi réduit aux *quadratures* est censé résolu. Cependant l'emploi pratique des équations trouvées ne laisserait pas d'exiger des calculs numériques assez pénibles; c'est pourquoi nous allons chercher à remplacer ces formules rigoureuses par d'autres approximatives plus maniables.

Il faut d'abord remarquer que dans les appareils employés jusqu'ici la longueur du tuyau occupé par l'eau, ne varie que d'une petite fraction, pendant le mouvement

entier, ou, en d'autres termes, que la valeur de x est assez petite en comparaison de la valeur de L. Par exemple, dans les appareils qui fonctionnent au percement des Alpes, la longueur de la portion du tube occupé par l'eau varie de moins d'un onzième, depuis le commencement, jusqu'à la fin de la pulsation.

De plus, le coefficient a qui provient du frottement et de la viscosité du liquide est ordinairement assez petit, en sorte que la quantité

$$e^{ax}$$

varie fort peu entre les limites de l'intégration.

Il en résulte que la quantité

$$(L+x)^{b-1}e^{ax},$$

comprise sous le signe de l'intégration, subit des variations assez petites entre les limites de l'intégration.

Dans l'appareil cité, cette quantité ne varie que d'un huitième à peu près du commencement à la fin d'une pulsation.

Or on sait, par les premiers principes du calcul intégral, qu'on peut faire sortir un facteur variable de dessous le signe $\int$, pourvu qu'on multiplie l'intégrale par une quantité égale à une moyenne entre les valeurs qu'acquiert ce facteur entre les limites de l'intégration.

Nous pourrons donc faire sortir de dessous l'intégrale la quantité variable

$$(L+x)^{b-1}e^{ax},$$

à la condition de multiplier l'intégrale par une constante moyenne entre les valeurs que prend cette fonction pour

toutes les valeurs de x comprises entre les limites de l'intégration, ou, ce qui revient au même, par une quantité de la forme

$$(L+\xi)^{b-1}e^{a\xi},$$

ξ désignant une valeur de x comprise entre les deux limites de l'intégration.

Comme la valeur de la fonction

$$(L+x)^{b-1}e^{ax}$$

varie fort peu entre les limites de l'intégration, nous pourrons prendre pour ξ une moyenne arithmétique entre les limites de l'intégration, sans craindre une erreur grave.

De cette manière, nous aurons l'équation

$$(L+x)^b e^{ax}y-\left(L+\frac{x}{2}\right)^{b-1}e^{\frac{ax}{2}}\int_0^x(H-x)\,dx=0,$$

pour déterminer, pendant la première période, la valeur de y, ou bien, en effectuant l'intégration,

$$(L+x)^b e^{\frac{ax}{2}}y-\left(L+\frac{x}{2}\right)^{b-1}\left(Hx-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

La valeur de y relative à la deuxième période sera donnée par l'équation

$$(L+x)^b e^{ax}y-\left(L+\frac{x}{2}\right)^{b-1}e^{\frac{ax}{2}}\int_0^x\left[H+h-x-h\left(\frac{l-x_0}{l-x}\right)^k\right]dx$$
$$+\left(L+\frac{x_0}{2}\right)^{b-1}e^{\frac{ax_0}{2}}\int_0^{x_0}\left[h-h\left(\frac{l-x_0}{l-x}\right)^k\right]dx=0,$$

ou bien, en intégrant, par l'équation

$$(L+x)^b e^{ax} y - \left(L+\frac{x}{2}\right)^{b-1} e^{\frac{ax}{2}} \left[Hx + hx - \frac{x^2}{2} - \frac{h(l-x_0)^k}{(k-1)l^{k-1}} \left\{ \left(\frac{l}{l-x}\right)^{k-1} - 1 \right\} \right]$$

$$+ \left(L+\frac{x_0}{2}\right)^{b-1} e^{\frac{ax_0}{2}} \left[hx_0 - \frac{h(l-x_0)^k}{(k-1)l^{k-1}} \left\{ \left(\frac{l}{l-x_0}\right)^{k-1} - 1 \right\} \right] = 0.$$

Pendant la troisième période, on aura

$$(L+x)^b e^{ax} y + \left(L+\frac{x}{2}\right)^{b-1} e^{\frac{ax}{2}} \int_0^x (nh - h - H + x)\, dx$$

$$- \left(L+\frac{x_1}{2}\right)^{b-1} e^{\frac{ax_1}{2}} \int_0^{x_1} \left[nh - h \left(\frac{l-x_0}{l-x}\right)^k \right] dx$$

$$+ \left(L+\frac{x_0}{2}\right)^{b-1} e^{\frac{ax_0}{2}} \int_0^{x_0} \left[h - h \left(\frac{l-x_0}{l-x}\right)^k \right] dx = 0,$$

et, en intégrant entre les limites indiquées,

$$(L+x)^b e^{ax} y + \left(L+\frac{x}{2}\right)^{b-1} e^{\frac{ax}{2}} \left(nhx - hx - Hx + \frac{x^2}{2} \right)$$

$$- \left(L+\frac{x_1}{2}\right)^{b-1} e^{\frac{ax_1}{2}} \left[nhx_1 - \frac{h(l-x_0)^k}{(k-1)l^{k-1}} \left\{ \left(\frac{l}{l-x_1}\right)^{k-1} - 1 \right\} \right]$$

$$+ \left(L+\frac{x_0}{2}\right)^{b-1} e^{\frac{ax_0}{2}} \left[hx_0 - \frac{h(l-x_0)^k}{(k-1)l^{k-1}} \left\{ \left(\frac{l}{l-x_0}\right)^{k-1} - 1 \right\} \right] = 0.$$

A la fin de cette troisième période, on doit avoir en même temps $x=l$, $y=0$; donc nous aurons

$$nhl - hl - Hl + \frac{l^2}{2}$$

$$-\left(\frac{2L+x_1}{2L+l}\right)^{b-1} e^{\frac{a(x_1-l)}{2}}\left[nhx_1 - \frac{h(l-x_0)^k}{(k-1)l^{k-1}}\left\{\left(\frac{l}{l-x_1}\right)^{k-1}-1\right\}\right]$$

$$+\left(\frac{2L+x_0}{2L+l}\right)^{b-1} e^{\frac{a(x_0-l)}{2}}\left[hx_0 - \frac{h(l-x_0)^k}{(k-1)l^{k-1}}\left\{\left(\frac{l}{l-x_0}\right)^{k-1}-1\right\}\right]=0,$$

pour la relation qui doit exister entre H, l, x_0 et n, où

$$x_1 = l - \frac{l-x_0}{n^{\frac{1}{k}}}.$$

9. La relation précédente pourra encore être simplifiée, en observant que les facteurs en dehors des crochets diffèrent peu de l'unité. Si on les suppose égaux à l'unité, on a, après avoir remplacé x_1 par sa valeur en n,

$$H = \frac{l}{2} + \frac{hk(l-x_0)}{(k-1)l}\left(n^{1-\frac{1}{k}}-1\right),$$

équation très-simple qui permet de résoudre tous les problèmes dans lesquels, étant données trois des quatre quantités H, l, x, n, on demande l'autre.

C'est l'équation à laquelle on serait parvenu en faisant dans les équations du mouvement

$$a=0, \qquad b=1;$$

c'est-à-dire, en faisant abstraction des résistances passives produites par les frottements et les coudes, et en négligeant le rapport $\frac{\Omega^2}{A^2}$ qui est fort petit, en raison des grandes dimensions du bassin supérieur.

Nous remarquerons que négliger $\frac{\Omega^2}{A^2}$ revient au même que négliger la force vive de l'eau contenue dans le bassin supérieur.

Lorsqu'on aura trouvé, à l'aide de l'équation précédente, une première valeur de l'inconnue, en négligeant les résistances passives, il sera ensuite facile de pousser l'approximation plus loin, au moyen des formules de l'article 8. Enfin, on pourra obtenir un résultat exact, en se servant des formules rigoureuses des articles 4, 5 et 6. Cette marche ne présente de difficultés que dans la longueur du calcul.

On tire de l'équation ci-dessus

$$n = \left[1 + \frac{(k-1)(2H-l)l}{2hk(l-x_0)}\right]^{\frac{k}{k-1}},$$

pour la valeur, exprimée en atmosphères, de la pression que fournit le compresseur. L'examen de cette expression nous montre d'abord que la pression est d'autant plus grande que x_0 diffère moins de l, et qu'elle devient infinie pour

$$l = x_0.$$

Par conséquent, quelles que soient les valeurs de H et de l, on peut toujours rendre n aussi grand qu'on veut; c'est-à-dire qu'avec une chute quelconque, on peut toujours comprimer l'air à de très-grandes tensions. Mais il importe de remarquer que comme $l - x_0$ représente la hauteur de la colonne d'air qu'on comprime, plus la tension qu'on veut

obtenir sera grande, plus petite sera la quantité d'air comprimé à chaque pulsation.

Remarquons que si la hauteur $l - x_0$, qui détermine la hauteur de la colonne d'air, est donnée, la valeur de l qui rend la tension maximum sera

$$l = H.$$

Quand on a

$$x_0 = 0,$$

la valeur de la pression de l'air dans le réservoir étant donnée par l'expression

$$n = \left[1 + \frac{(k-1)(2H-l)}{2hk}\right]^{\frac{k}{k-1}},$$

il est visible qu'elle croît à mesure que l diminue, et qu'elle est la plus grande possible quand

$$l = 0;$$

mais alors la quantité d'air comprimé à chaque pulsation devient nulle.

Dans le compresseur où x_0 n'est pas nul, l'eau commence à agir sur l'air après avoir acquis une vitesse finie, tandis que dans celui où

$$x_0 = 0,$$

l'eau part du repos pour comprimer l'air.

D'après les remarques précédentes, on voit qu'il existe une différence capitale entre ces deux appareils : à l'aide du premier, on peut pousser la compression de l'air aussi

loin qu'on veut, tandis qu'avec le second la condensation qu'on peut opérer a des bornes qui sont données par l'équation

$$n = \left[1 + \frac{(k-1)H}{hk}\right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Cependant, il ne faudrait point croire que le compresseur qu'on pourrait appeler *à hautes tensions* soit plus avantageux que le compresseur *à basses tensions*. Nous verrons bientôt que celui-ci lui est préférable sous le rapport de l'effet utile.

Afin de donner une idée des tensions qu'on peut obtenir au moyen du compresseur à basses tensions, nous ajoutons le tableau suivant, où, en regard des valeurs de $\frac{H}{h}$, ou de la hauteur de la chute divisée par la hauteur de la colonne d'eau qui mesure la pression atmosphérique, on trouve les valeurs de la tension n de l'air exprimée en atmosphères, qu'on ne peut dépasser ni même atteindre

$\frac{H}{h}$	n
0	1
1	2,4
2	4,8
3	8,6
4	14,2
5	21,9
6	32,2
7	45,5
8	62,4
9	83,2
10	108,6

(On a pris $k = 1{,}41$).

Si l'on suppose que la température de l'air, pendant la compression, reste constante, la relation qui doit exister entre H, l, x_0, n devient

$$H = \frac{l}{2} + \frac{h\,(l - x_0)}{l} \log n.$$

Le logarithme de cette formule est hyperbolique.

Pour le cas de

$$x_0 = 0,$$

ou du compresseur qui agit en partant du repos, on a

$$H = \frac{l}{2} + h \log n\,,$$

d'où l'on tire

$$n = e^{\frac{2H - l}{2h}}.$$

La plus grande valeur de n correspond à

$$l = 0\,;$$

on a alors

$$n = e^{\frac{H}{h}},$$

pour la valeur de la tension limite. En la convertissant en nombres, on obtient:

$\frac{H}{h} = 0$	$n = 1$
1	2,7
2	7,4
3	20,1
4	54,6
5	148,4
6	403,4
7	1096,6
8	2981,0
9	8103,1
10	22026,5

Il résulte de là que si l'on ne tenait point compte de la chaleur dégagée par la compression, on estimerait beaucoup trop haut les tensions qu'on peut produire avec le compresseur à colonne d'eau.

Durée des différentes périodes.

10. Dans le mouvement qui nous occupe, l'expression du temps est beaucoup plus compliquée que celle de la vitesse, et l'on ne pourrait en tirer aucun parti dans la pratique, sans y apporter de notables simplifications. Pour y parvenir, nous ferons remarquer que le mouvement de la colonne liquide est un mouvement oscillatoire où les frottements et les autres résistances passives agissent comme la résistance de l'air dans le mouvement du pendule.

Or, on sait que cette résistance n'influe pas sensiblement sur la durée des très-petites oscillations du pendule; donc nous pourrons, sans grave erreur, négliger tout-à fait les résistances passives dans le calcul du temps.

En négligeant les résistances passives et la force vive de l'eau contenue dans le bassin supérieur, le temps relatif à la première période a pour expression

$$t = \sqrt{\frac{1}{g}} \int_0^x dx \sqrt{\frac{L+x}{2Hx - x^2}}.$$

Entre les deux limites $_0$ et x, la quantité $L+x$ ne varie pas beaucoup ; on peut donc, sans erreur grave, la supposer constante et égale à

$$L+\frac{x}{2}.$$

Alors on aura

$$t=\sqrt{\frac{2L+x}{2g}}\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{2Hx-x^2}},$$

ou bien

$$t=2\sqrt{\frac{2L+x}{2g}}\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x}{2H}}.$$

En désignant par t_0 la durée de la première période, nous aurons

$$t_0=2\sqrt{\frac{2L+x_0}{2g}}\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x_0}{2H}}.$$

La durée de la deuxième période est donnée par l'expression

$$t_1=\sqrt{\frac{1}{g}}\int_{x_0}^{x_1}dx\sqrt{\frac{L+x}{2(H+h)x-x^2-2hx_0-\dfrac{2h(l-x_0)}{k-1}\left[\left(\dfrac{l-x_0}{l-x}\right)^{k-1}-1\right]}}.$$

En substituant encore ici à la quantité $L+x$ une moyenne arithmétique entre les valeurs qu'elle acquiert aux deux limites de l'intégration, développant en série la quantité

$$\left(\frac{l-x_0}{l-x}\right)^{k-1}=\left(1-\frac{x-x_0}{l-x_0}\right)^{1-k},$$

suivant les puissances de $\frac{x-x_0}{l-x_0}$, et négligeant les puissances supérieures à la seconde, on trouve

$$t_1 = \sqrt{\frac{(2L+x_0+x_1)(l-x_0)}{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{2[H(l-x_0)+hkx_0]x-(l-x_0+hk)x^2-hkx_0^2}},$$

ou bien, en effectuant l'intégration,

$$t_1 = \sqrt{\frac{(2L+x_0+x_1)(l-x_0)}{2g(l-x_0+hk)}} \left[\arcsin \frac{(H-x_0)(l-x_0)}{\sqrt{[H(l-x_0)+hkx_0]^2-hkx_0^2(l-x_0+hk)}} \right.$$

$$\left. - \arcsin \frac{(H-x_1)(l-x_0)-hk(x_1-x_0)}{\sqrt{[H(l-x_0)+hkx_0]^2-hkx_0^2(l-x_0+hk)}} \right],$$

formule dans laquelle on doit mettre pour x_1 la valeur qui a été donnée précédemment.

Pour la troisième période, on aura

$$t_2 = \sqrt{\frac{1}{g}} \int_{x_1}^{l} dx \sqrt{\frac{L+x}{2(L+x_1)y_1-2(nh-h-H)(x-x_1)-x^2+x_1^2}},$$

et comme l'on doit avoir

$$2(L+x_1)y_1-2(nh-h-H)(l-x_1)-l^2+x_1^2=0,$$

on en conclut

$$t_2 = \sqrt{\frac{1}{g}} \int_{x_1}^{l} dx \sqrt{\frac{L+x}{(l+nh-h-H)^2-(x+nh-h-H)^2}}.$$

Substituant à $L+x$ la moyenne arithmétique entre ses valeurs extrêmes, et effectuant l'intégration entre les limites indiquées, il vient

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L+x_1+l}{2g}} \arccos\left(\frac{x_1+nk-k-H}{l+nk-k-H}\right),$$

pour la durée de la troisième période.

Afin de simplifier le calcul du temps relatif à la dernière période, nous supposerons que l'eau, en s'écoulant, suit un siphon de diamètre constant Ω. Alors on aura, en négligeant les résistances passives,

$$(l'+x)\frac{dy}{dx}+x=0,$$

pour l'équation du mouvement, laquelle, étant intégrée de manière qu'on ait $y=0$ quand $x=l$, donnera

$$y = l - x + l' \log\left(\frac{l'+x}{l'+l}\right).$$

Le temps sera donné, en fonction de x, par l'équation

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{dx}{\sqrt{l-x+l'\log\left(\frac{l'+x}{l'+l}\right)}}.$$

On ne sait point intégrer cette formule sous forme finie; mais on peut obtenir une valeur approchée de t au moyen des séries.

Ce qu'il nous importe de connaître, c'est le temps que le niveau de l'eau met à passer de r en a; car, au moment

où l'eau parvient en a, le régulateur ferme la soupape de décharge et arrête l'écoulement, qui continuerait, sans cela, en raison de la vitesse acquise par la colonne liquide. En nommant t_3 ce temps, nous aurons

$$t_3 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{l - x + l' \log\left(\frac{l'+x}{l'+l}\right)}}.$$

Remarquons que

$$\frac{l'+x}{l'+l} = 1 - \frac{l-x}{l+l'}.$$

Entre les limites de l'intégration, on a toujours

$$l - x < l + l';$$

par conséquent, on pourra développer

$$\log\left(1 - \frac{l-x}{l+l'}\right)$$

suivant les puissances de

$$\frac{l-x}{l+l'};$$

ce qui donnera, en négligeant la troisième puissance,

$$t_3 = \sqrt{\frac{l+l'}{2g}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{l(l-x) - \frac{l'(l-x)^2}{2(l+l')}}}.$$

En intégrant entre les limites indiquées, il vient

$$t_3 = \frac{2(l+l')}{\sqrt{g\,l'}} \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{l'}{2(l+l')}},$$

ou à peu près

$$t_3 = \sqrt{\frac{2(l+l')}{g}},$$

c'est-à-dire le temps que mettrait un corps pesant à tomber de la hauteur $l+l'$.

Rendement du compresseur à colonne d'eau.

11. Quand une pulsation du compresseur est terminée, le résultat obtenu consiste en ce qu'un volume d'air

$$(l - x_0)\,\Omega,$$

mesuré à la pression atmosphérique, est entré dans le réservoir d'air.

A la pression du réservoir, ce volume deviendra

$$\frac{(l - x_0)\,\Omega}{n},$$

après que l'air, chauffé par la compression, aura repris la température primitive qu'il avait et qu'ont les corps environnants.

A chaque pulsation, un volume d'eau

$$l\Omega$$

descend du niveau supérieur du cours d'eau jusqu'au niveau de la soupape de décharge; par suite, le travail développé par la chute d'eau, à chaque pulsation, est

$$\Pi l \Omega H.$$

On a donc

$$\psi = \frac{l - \omega_0}{n \Pi H l},$$

pour l'expression du volume d'air, à la pression de n atmosphères, obtenu pour chaque unité de travail fourni par l'eau servant de moteur.

Tel est le rendement de la machine en air comprimé. On pourrait maintenant se demander quel est le travail que cette masse d'air peut produire par son expansion en passant de n atmosphères à une atmosphère.

On sait que le travail moteur dû aux réactions réciproques des particules d'un fluide élastique, pendant la dilatation, est donné par la formule

$$\Pi \int p\, dv;$$

Π représentant le poids d'un mètre cube d'eau, p la hauteur d'une colonne d'eau qui produirait une pression égale à celle que le gaz exerce, à chaque instant, et dv la différentielle du volume variable du gaz.

Or, dans le cas où l'on ne fournit point de chaleur à l'air pendant l'expansion, on a [5]

$$p = p_0 \left(\frac{v_0}{v}\right)^k,$$

en désignant par p_0 et v_0 la première pression et le premier volume de départ. En substituant dans l'intégrale, elle devient

$$\Pi p_0 v_0^k \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^k} = \frac{\Pi p_0 v_0}{k-1}\left[1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^{k-1}\right],$$

ou bien

$$\frac{\Pi p_0 v_0}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right].$$

Telle est l'expression du travail moteur dû à la dilatation d'un volume v_0 d'un gaz, dont tous les points passent de la pression p_0 à la pression p, sans addition externe de chaleur.

Nous ne tenons point compte du travail de la pesanteur sur le gaz; en effet, on conçoit que le poids du gaz est généralement très-petit en comparaison des pressions exercées sur son enveloppe par suite de son élasticité, et que dès lors il n'y a pas grande erreur à en faire abstraction. Du reste, rien ne serait plus facile que d'y avoir égard.

En faisant

$$k = 1,$$

dans la formule ci-dessus, on retombe sur l'expression connue

$$\Pi p_0 v_0 \log\left(\frac{p_0}{p}\right),$$

du travail produit par la détente d'un gaz dans le cas où la température reste constante.

Revenant à la question qui nous occupe, nous avons

$$p_0 = nh\,,$$

$$p = h\,;$$

de sorte que le travail contenu dans un mètre cube de l'air du réservoir sera exprimé par

$$\frac{\Pi\, n\, h}{k-1}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right],$$

et le travail contenu dans le volume ψ de l'air, à n atmosphères, fourni par chaque kilogrammètre de travail dépensé, sera exprimé par

$$\varphi = \frac{h(l-x_0)}{(k-1)\,H\,l}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right].$$

C'est le rendement exprimé en travail dynamique, c'est-à-dire le rapport entre l'effet utile que peut produire la détente de l'air comprimé par la machine et le travail moteur dépensé (*).

(*) Cette évaluation du rendement en travail est trop faible, à cause de l'omission d'une circonstance que nous allons relever. Pendant la troisième période du jeu du compresseur, l'air condensé, en pénétrant dans le réservoir, chasse devant lui un volume égal de l'eau qui maintient la pression dans le réservoir, et le soulève à la hauteur de la colonne d'eau, qui produit la pression.

Tandis que l'air emprisonné dans le réservoir perd la chaleur acquise dans l'acte de la compression, une partie du volume d'eau soulevé redescend, par l'effet de la diminution de volume de l'air; mais un volume d'eau égal au volume de l'air refroidi continue à rester soulevé.

Maintenant, lorsque l'air comprimé dans le réservoir passe dans la machine où se

Dans l'hypothèse de la température de l'air constante, le rendement serait exprimé par

$$\varphi = \frac{k\,(l - x_0)}{H\,l} \log n.$$

Si l'on substitue, dans l'expression du rendement, à la place de n, sa valeur trouvée précédemment [9] en fonction de H, l, x_0, il vient

$$\varphi = \frac{1}{H\left[\frac{2k}{2H-l} + \frac{(k-1)\,l}{k\,(l-x_0)}\right]}.$$

On voit par là que le rendement est d'autant plus petit que la hauteur $l - x_0$ de la capacité où se fait la compression est plus petite, ou bien que x_0 est plus grand.

Comme la valeur de la pression n de l'air dans le réservoir augmente avec x_0 [9], il s'ensuit que le rendement sera d'autant plus petit que la tension de l'air dans le réservoir sera plus grande.

La valeur du rendement dans l'hypothèse de

$$k = 1,$$

devient

$$\varphi = \frac{2H - l}{2H}.$$

---

fait la détente, cette masse liquide redescend au niveau inférieur et restitue en partie le travail que son élévation avait absorbé.

Ainsi, au travail que produit la détente de l'air, il faut ajouter le travail que développe le même air en passant, à pression constante dans la machine où s'opère la détente, travail qui est égal à la pression dans le réservoir multipliée par le volume de l'air comprimé.

On verra, dans le mémoire suivant, que le rapport du travail développé par la détente de l'air au travail dépensé pour la compression est parfaitement égal au rapport de la somme des travaux que développent l'admission de l'air et sa détente à la somme des travaux que coûtent la compression et le refoulement de l'air; et que de plus ce rapport est égal à 0,59, dans un compresseur, où les résistances passives seraient nulles, comprimant l'air à 6 atmosphères. (*Note de 1874*).

Donc, dans l'hypothèse de la température constante, le rendement reste toujours le même, quelle que soit la tension qu'on donne à l'air.

Nous sommes parvenus à ces résultats en faisant abstraction des résistances passives. Maintenant, il est facile de voir que l'effet de ces résistances est de diminuer le rendement d'autant plus que la vitesse acquise avec laquelle on fait agir l'eau sera plus grande. En effet, ces résistances étant proportionnelles au carré des vitesses, elles croîtront à mesure qu'on fera prendre à l'eau de plus grandes vitesses. Il s'ensuit que le travail perdu sera plus grand dans le compresseur à hautes tensions que dans l'autre.

On en conclut que la disposition la plus avantageuse du compresseur à colonne d'eau, au point de vue du rendement, est celle où l'eau part du repos pour comprimer l'air. Cependant, il peut se présenter des circonstances où, ayant besoin de grandes tensions, l'appareil dans lequel l'eau agit avec une vitesse acquise peut rendre des services précieux.

Dans le cas où l'eau part du repos pour comprimer l'air, on a

$$\varphi = \frac{k}{(k-1)\,H}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right],$$

qui devient pour $k=1$,

$$\varphi = \frac{k}{H}\log n.$$

D'où l'on voit que, pour les mêmes tensions de l'air, la valeur du rendement est d'autant plus grande que H, ou la hauteur de la chute, est plus petite. Mais, on ne peut pas donner à H une valeur inférieure à celle qui rend

$$l=0;$$

c'est-à-dire à celle qui rend nulle la hauteur de la chambre de compression. Ainsi le plus grand effet possible sera donné par la valeur de H qui rend $l=0$.

Nous avons trouvé [9], pour la relation entre H et n quand $l=0$,

$$H=\frac{kk}{k-1}\left(n^{1-\frac{1}{k}}-1\right),$$

on aura donc

$$\varphi=\frac{1}{kn^{1-\frac{1}{k}}},$$

pour la valeur de la limite du rendement exprimé en travail dynamique qu'on ne peut dépasser.

Dans le cas où

$$k=1,$$

le plus grand rendement devient

$$\varphi=1.$$

La limite du rendement, exprimée en volume d'air, a pour expression

$$\psi=\frac{k-1}{\Pi kkn\left(n^{1-\frac{1}{k}}-1\right)}.$$

Dans le cas où $k=1$,

$$\psi=\frac{1}{\Pi kn\log n}.$$

Avant de terminer ce qui concerne le rendement du compresseur à colonne d'eau, nous ferons remarquer que la chute et la pression dans le gazomètre restant les mêmes, la hauteur de la chambre de compression change, suivant qu'on tient ou qu'on ne tient pas compte de la chaleur dégagée pendant la compression, suivant qu'on fait, ou non, abstraction des résistances passives. Cependant, comme l'expression du rendement dans le cas où $x_0 = 0$ ne contient point la hauteur l, la valeur du rendement, dans ce cas, n'est point influencée par la chaleur dégagée et par les résistances passives.

L'effet de la chaleur dégagée et des résistances passives n'est pas d'altérer le rendement de la machine, mais de diminuer l et, par suite, d'augmenter le diamètre de la chambre de compression pour obtenir la même quantité d'air comprimé; ou, ce qui revient au même, d'augmenter le nombre d'appareils, si l'on maintient constant le diamètre de la chambre.

Ce résultat, qui au premier abord paraît paradoxal, tient à ce que le compresseur à colonne d'eau, tel qu'il est disposé, n'utilise pas toute la chute disponible. En effet la descente de l'eau, pendant la période de décharge, est complètement perdue. Or cette perte est d'autant plus petite que la hauteur de la chambre de compression est plus petite: de sorte qu'à mesure que l diminue, on tire un plus grand parti du travail moteur disponible.

Si le compresseur à colonne d'eau utilisait toute la chute, le rendement ne serait plus indépendant de la chaleur dégagée et des résistances passives.

Disons en passant que les pertes occasionnées par la chaleur dégagée et par les résistances passives, peuvent être calculées aisément au moyen des valeurs de l, correspondantes au cas où l'on a égard, ou non, à ces éléments.

ÉTABLISSEMENT D'UNE USINE À COMPRIMER DE L'AIR.

12. Il ne saurait entrer dans le cadre de cette étude de traiter les divers problèmes auxquels peut donner lieu l'établissement d'un système de compresseurs, problèmes qui peuvent varier extrêmement suivant les localités. Nous nous contenterons d'en indiquer quelques-uns.

Quand il s'agit d'établir une usine à comprimer de l'air, on peut se donner, soit le volume d'air à une pression déterminée qu'on veut obtenir par unité de temps, soit le travail à obtenir par unité de temps, et se demander, dans l'un et dans l'autre cas, le volume d'eau à dépenser par unité de temps.

Désignons par

Q la dépense du courant en mètres cubes, par seconde;

V le volume d'air, à la pression de n atmosphères, dont on a besoin par seconde;

m le nombre de chevaux-vapeur que la détente de l'air, à n atmosphères, doit produire.

Nous aurons évidemment

$$V = \psi Q H \Pi,$$
$$75m = \varphi Q H \Pi,$$

d'où l'on tire, après avoir substitué, au lieu de φ et ψ, leurs valeurs trouvées précédemment [11],

$$Q = n V \left(\frac{l}{l - x_0}\right),$$

$$Q = \frac{75 m l (k-1) n^{1-\frac{1}{k}}}{\Pi h (l - x_0)\left(n^{1-\frac{1}{k}} - 1\right)}.$$

Le volume d'eau à débiter par seconde étant ainsi connu, on peut déterminer le nombre d'appareils nécessaires.

Si nous appelons θ la durée d'une pulsation entière composée de ses quatre périodes, c'est-à-dire le temps qui sépare deux ouvertures successives de la soupape d'alimentation, il est visible que le volume d'eau qui passe par chaque compresseur, dans une seconde, est exprimé par

$$\frac{l\Omega}{\theta}.$$

Ce volume multiplié par le nombre des compresseurs doit être égal au volume de l'eau du courant par seconde; en sorte qu'on doit avoir

$$Q = N\frac{l\Omega}{\theta},$$

en désignant par N le nombre des compresseurs nécessaires. On en tire

$$N = \frac{Q\theta}{l\Omega}.$$

La durée totale θ d'une pulsation est une fonction de la hauteur l de la chambre de compression, dont l'expression est assez compliquée; mais on peut s'assurer que le degré de cette fonction est inférieur au premier. On en conclut que N croît pendant que l diminue.

Or nous avons trouvé, en négligeant les résistances passives, la relation suivante entre la hauteur l et la chute H [9]:

$$H = \frac{l}{2} + \frac{hk(l-x_0)}{(k-1)l}\left(n^{1-\frac{1}{k}} - 1\right),$$

laquelle nous montre que l croît avec la hauteur H de la

chute. Donc le nombre d'appareils à employer diminue pendant que la hauteur de la chute augmente.

D'une autre part les frais d'établissement de chaque appareil augmentent à mesure que la chute est plus grande. On peut donc se proposer de déterminer la chute la plus convenable au point de vue de la dépense en argent.

Les frais d'établissement pour chaque compresseur peuvent être considérés comme composés de trois termes: le premier, proportionnel à la hauteur H de la chute, terme qui tient compte du coût des tuyaux descendants et des dépenses nécessaires pour amener l'eau sur l'appareil; le second, proportionnel à la hauteur l de la chambre de compression; enfin, le troisième constant, dû au coût des réservoirs d'air, des conduites d'air, des bâtiments, etc. Ainsi, la dépense totale en argent pour N compresseurs, sera égale à

$$(AH + Bl + C)N,$$

ou bien à

$$\frac{(AH + Bl + C)\,Q\theta}{l\Omega}.$$

C'est le minimum de cette quantité qu'il faut trouver. La valeur de θ en fonction de l est assez compliquée; mais elle est, à peu de chose près, simplement proportionnelle à la racine carrée de l. Cela posé, nous aurons à déterminer le minimum de l'expression

$$\frac{AH + Bl + C}{\sqrt{l}}.$$

En remplaçant H par sa valeur en l, donnée ci-dessus :

$$H = \frac{l}{2} + \left(\frac{l - x_0}{l}\right) M,$$

où l'on a fait

$$M = \frac{kk\left(n^{1-\frac{1}{k}} - 1\right)}{k-1}$$

on obtient

$$\frac{(A+2B)\,l^2 + 2(AM+C)\,l - 2AMx_0}{2l\sqrt{l}}.$$

La différentiation par rapport à l donne l'équation

$$(A+2B)\,l^2 - 2\,(AM+C)\,l + 6AMx_0 = 0,$$

pour déterminer la valeur de l correspondante au minimum de la dépense en argent.

En substituant la plus grande des deux racines de cette équation du second degré dans l'expression de H, on trouvera la hauteur la plus convenable à donner à la chute d'eau au point de vue économique.

On doit au reste remarquer que la valeur de H ainsi obtenue n'est qu'approximative ; en effet nous avons supposé, dans l'analyse précédente, que la durée d'une pulsation était proportionnelle à la racine carrée de la hauteur de la chambre de compression, ce qui n'est qu'une approximation ; de plus, nous avons employé une relation approximative entre H et l. Toutefois cette valeur de H pourra servir pour fixer les idées dans l'avant-projet d'un système de compresseurs destinés à fournir un effet donné.

On pourra ensuite résoudre le problème avec toute l'exactitude désirable, au moyen de tâtonnements numériques successifs, en employant les formules rigoureuses que nous avons établies [4], [5], [6], [7]. A part leur longueur, ces calculs ne présentent aucune difficulté. Mais il est bon de commencer par déterminer H approximativement; de cette manière, on ne procédera pas tout à fait au hasard dans les tâtonnements qu'on fera ensuite pour résoudre la question avec toute l'exactitude désirable.

Au surplus, une foule de circonstances qu'on ne peut prévoir d'avance, et qui dépendent principalement des localités où les appareils doivent être placés, influent sur les frais d'établissement: en sorte que chaque cas particulier présentera une question nouvelle. Ce qui précède servira d'exemple pour résoudre les questions analogues qui se présenteront dans l'établissement d'une usine à comprimer de l'air.

Applications numériques.

13. Nous allons appliquer les formules que nous venons d'établir aux compresseurs qui fonctionnent au percement du grand tunnel des Alpes Cottiennes.

On a dans ces appareils

$$H = 25^{m},$$
$$l = 4{,}02,$$
$$x_0 = 0,$$

c'est-à-dire que l'eau y agit en partant du repos, ou sans vitesse acquise.

La hauteur moyenne du baromètre est à Bardonnèche (entrée méridionale de la galerie) de $0^m,6507$. Donc, si l'on prend pour la densité du mercure 13,6, on aura

$$h = 8^m,85,$$

pour la hauteur de la colonne d'eau qui fait équilibre à la pression atmosphérique.

La hauteur de la colonne d'eau qui mesure l'excès de la pression intérieure ayant lieu dans les réservoirs d'air sur la pression atmosphérique extérieure, est de 50 mètres : on a donc

$$n = 1 + \frac{50}{8,85} = 6,65 \text{ atmosphères.}$$

L'altitude de l'emplacement des compresseurs du côté de Bardonnèche est de 1350 mètres au-dessus du niveau de la mer ; la latitude 45° 5′ N. On en déduit

$$g = 9^m,803.$$

Les observations faites avec le plus grand soin sur la vitesse du son dans l'air, jointes aux résultats des observations de M. REGNAULT relatives à la densité de l'air, etc., conduisent à la valeur

$$k = 1,410,$$

valeur qui est probablement exacte pour trois, si ce n'est pour quatre de ses chiffres (*).

(*) W. THOMSON, *Note on the Specific Heats of Air*. Phil. Trans., 1852, p. 80.

Supposons qu'on se propose la question : étant données la hauteur de la chute $H = 25$ mètres et la pression dans le réservoir $n = 6{,}65$ atmosphères, trouver la hauteur l de la chambre de compression.

En négligeant d'abord les résistances passives, nous avons [9], pour résoudre le problème, l'équation

$$l = 2H - \frac{2hk\left(n^{1-\frac{1}{k}} - 1\right)}{k-1}.$$

En y introduisant les valeurs numériques ci-dessus, il vient

$$l = 5^{m},27.$$

Ce résultat doit pécher par excès, parce qu'on a négligé les résistances passives.

Nous pourrons obtenir une valeur plus approchée à l'aide de la formule

$$l = 2(H - nh + h) + 2h\left(\frac{2L + x_1}{2L + l}\right)^{b-1} e^{\frac{a(x_1 - l)}{2}}\left(n - \frac{kn^{1-\frac{1}{k}} - 1}{k-1}\right),$$

qu'on tire de celle que nous avons donnée à la fin de l'article 8, en y faisant $x_0 = 0$.

Nous avons posé [4] :

$$L = \lambda\frac{\Omega}{A} + \lambda',$$

$$a = \frac{8\alpha}{D},$$

$$b = 1 - \frac{\Omega^2}{A^2} + 2\alpha\Omega^2\int_{\lambda}^{\lambda+\lambda'}\frac{\chi\,ds}{\omega^3} + 2\alpha\lambda\frac{c\Omega^2}{A^3} + \sum 2\beta - aL.$$

Dans l'appareil employé au percement des Alpes, on a

$$\lambda = 1^{m},3,$$
$$\lambda' = 46,64,$$
$$D = 0,62,$$
$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4},$$
$$A = 52^{mq}.$$

Autour de la soupape d'alimentation, le tuyau est renflé pour $1^{m},50$ de longueur en conservant toujours la même section pour le passage de l'eau. On a pour ce renflement

$$\int_0^{1,50} \frac{\chi\, d\,\varpi}{w^3} = \frac{9,8}{\Omega^3}.$$

Cela posé, en prenant

$$\alpha = 0,0035,$$

on obtient

$$L = 46,65,$$
$$a = 0,045,$$
$$b = 1,16 + \sum 2\beta.$$

Le tuyau présente trois coudes pour lesquels on a

$$r = 1^{m},80, \qquad r' = 1^{m},05, \qquad r'' = 1,05,$$
$$C = 1,66, \qquad C' = 1,65, \qquad C'' = 1,65.$$

Avec ces valeurs et en se rappelant que

$$\beta = (0,0039 + 0,0186 \,.\, r)\,\frac{C}{2r^2},$$

on trouve

$$\sum 2\beta = 0,09,$$

et par suite

$$b = 1,25.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$l = (55,27)\, e^{-(0,006)\,l}\left[\frac{93,3 + (0,739)\,l}{93,3+l}\right]^{0,25} - 50.$$

On tire aisément de cette équation transcendante, au moyen de quelques tâtonnements,

$$l = 3^{m},86,$$

valeur qui diffère seulement de $0^{m},16$ de la valeur adoptée. En réalité, elle en diffère encore moins, car la hauteur $4^{m},02$ de la chambre de compression est toujours diminuée en pratique par les fuites de l'eau autour de la soupape d'alimentation.

Nous allons nous occuper maintenant de la durée des différentes périodes, en négligeant les résistances passives.

La durée de la première période est zéro, puisque $x = 0$.

La durée de la deuxième période s'obtient en faisant $x_0 = 0$ dans l'expression du temps t_1 [10]; ce qui donne

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{(2L + x_1)\,l}{2g\,(l + hk)}}\ \text{arc sin}\ \sqrt{\frac{(l + hk)\,x_1}{2Hl}}.$$

Dans notre cas particulier

$$l = 5^{m},27\ ,$$
$$x_1 = 3^{m},89\ ;$$

ainsi, il vient

$$t_1 = 1'',30.$$

En substituant ces mêmes valeurs de l et de x_1, dans la formule

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L + x_1 + l}{2g}}\ \text{arc cos}\left(\frac{x_1 + nh - h - H}{l + nh - h - H}\right),$$

on trouve, pour la durée de la troisième période,

$$t_2 = 0'',69.$$

La durée de la quatrième période est donnée par la formule

$$t_3 = \frac{2(l + l')}{\sqrt{g\,l'}}\ \text{arc sin}\sqrt{\frac{l'}{2(l + l')}}.$$

Dans le compresseur dont nous nous occupons

$$l' = 5^{m},79.$$

En substituant et achevant les calculs, on trouve

$$t_3 = 1'',58.$$

Ainsi, la durée totale d'une pulsation sera

$$\theta = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 = 3'',57.$$

A l'égard du rendement du compresseur, si l'on fait

$$\Pi = 1000^{k},$$
$$H = 25^{m},$$
$$n = 6^{atm},65,$$

dans l'expression

$$\psi = \frac{1}{n\Pi H}$$

du rendement en volume d'air, on trouve

$$\psi = 0^{mc},000\,006\,015,$$

ou bien, en prenant le litre pour unité de volume et le dynamode pour unité de travail,

$$\psi = 6^{lit},015.$$

On pourrait exprimer ce résultat en d'autres termes, en disant qu'il faut un travail moteur de

$$\frac{1000^{km}}{6,015} = 166^{km},25,$$

pour obtenir un litre d'air comprimé à 6,65 atmosphères.

Maintenant, la détente d'un litre d'air de la pression de $6^{atm},65$ à celle d'une atmosphère, peut développer un travail exprimé par [11]

$$\frac{6,65 \times 8,85}{0,41}\left[1 - \left(\frac{1}{6,65}\right)^{\frac{0,41}{1,41}}\right] = 60^{km},8.$$

Par conséquent, le rendement du compresseur en travail dynamique, ou le rapport entre l'effet utile et le travail de la chute, est

$$\frac{60,80}{166,25} = 0,37.$$

Dans l'hypothèse d'une température constante, le travail développé par un litre d'air passant de la pression $6^{atm},65$ à la pression d'une atmosphère, serait

$$6,65 \times 8,85 \log (6,65) = 111^{km},5;$$

de sorte que le rendement deviendrait

$$\frac{111^{km},5}{166^{km},25} = 0,67.$$

On voit par là que le refroidissement produit par la dilatation de l'air réduit l'effet utile presqu'à la moitié de ce qu'il serait si la température restait constante.

Nous avons trouvé [11]

$$\varphi = \frac{1}{k n^{1-\frac{1}{k}}},$$

pour la limite du rendement qu'il est possible d'obtenir, s'il s'agit de travail dynamique, et

$$\psi = \frac{k-1}{\pi k k n \left(n^{1-\frac{1}{k}} - 1\right)},$$

lorsqu'on parle de volume d'air.

En substituant, dans ces formules, les données ci-dessus, on trouve

$$\varphi = 0^{km},41,$$
$$\psi = 0^{mc},000\,006\,7.$$

C'est-à-dire que, sans addition externe de chaleur, avec la dépense d'un kilogrammètre de travail moteur, on obtiendra toujours moins de 0,41 kilogrammètres, ou moins de 0,0067 litres d'air comprimé à 6,65 atmosphères, au moyen des hauteurs des colonnes d'eau qu'on emploie au percement des Alpes.

Si l'on admettait la constance de la température, pendant la compression de l'air, le rendement qu'on ne pourrait dépasser serait

$$\varphi = 1,$$

pour le travail dynamique, et

$$\psi = \frac{1}{\Pi h n \log n} = 0^{mc},000\,009,$$

pour le volume d'air comprimé.

Cependant, qu'on ne s'y trompe pas, ces rendements ne sauraient être obtenus qu'avec une chambre de compression d'une hauteur infiniment petite; de telle sorte qu'il faudrait un nombre infini d'appareils pour en retirer une quantité donnée d'air comprimé.

Pour donner un exemple du compresseur où l'eau agit avec une vitesse acquise, nous supposerons que, dans l'appareil dont nous avons donné ci-dessus les dimensions, on laisse monter librement la colonne liquide pour la hauteur d'un mètre, et nous nous proposerons de chercher quelle

tension peut donner le compresseur ainsi modifié, toutes les autres dimensions restant les mêmes.

La tension est donnée par la formule

$$n=\left[1+\frac{(k-1)\ (2H-l)\,l}{2hk\,(l-x_0)}\right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

En y faisant

$$k=1,41,$$
$$l=4^{m},02,$$
$$H=25,$$
$$x_0=1,$$

il vient

$$n=10^{atm},95.$$

Le rendement en travail est exprimé par [11]

$$\varphi=\frac{k(l-x_0)}{(k-1)\,Hl}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right].$$

En réduisant en nombres, on trouve

$$\varphi=0,33.$$

En comparant cette valeur du rendement à la valeur relative au compresseur où l'eau agit sur l'air en partant du repos, on reconnaît que celle-ci est plus forte d'un huitième à peu près que la première.

Le volume d'air comprimé à $10^{atm},95$ sera de

$$2^{lit},7$$

par dynamode dépensé par la chute d'eau.

On pourrait désirer connaître la température que l'air acquiert au moment de la compression. La formule

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{P'}{P}\right)^{1-\frac{1}{k}},$$

que nous avons donnée à l'article 4, va nous la fournir.

Dans le compresseur où l'eau agit sur l'air en partant du repos, nous avons

$$\frac{P'}{P} = 6{,}65.$$

Par conséquent, on aura

$$\frac{T'}{T} = 1{,}7348.$$

Si la température de l'air ambiant est de 10° C. au-dessus de la glace fondante, on aura

$$T = 274° + 10° = 284°,$$

et par suite

$$T' = 492°{,}7.$$

Donc la température de l'air, par l'effet de la compression, montera de 10° à 218°,7 au-dessus de la glace fondante.

Quant au refroidissement produit par l'expansion de l'air de la pression de $6^{atm},65$ à la pression de 1 atmosphère, il sera donné par la formule

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{1}{6{,}65}\right)^{1-\frac{1}{k}} = 0{,}5764,$$

où T représente la température de l'air avant la dilatation, et T' la température de l'air après la dilatation.

Si la température avant la dilatation est de 10° au-dessus de la glace fondante, on aura

$$T = 284°,$$

et par conséquent

$$T' = 163°,7,$$

ou bien

$$163°,7 - 274° = -110°,3$$

au-dessous de la glace fondante, c'est-à-dire que la dilatation de l'air doit produire un abaissement de température de 10° à — 110°,3.

Dans le compresseur où l'eau commence à agir sur l'air avec une vitesse acquise dans l'espace de 1 mètre, nous avons trouvé

$$\frac{P'}{P} = 10,95.$$

On en conclut

$$\frac{T'}{T} = 2,0055.$$

Si l'air ambiant est à 10° au-dessus de la glace fondante, on a

$$T = 284°,$$

et par suite

$$T' = 569°,6.$$

De sorte que la compression fera monter la température de 10° à 295°,6 au-dessus de la glace fondante.

Au contraire, la dilatation de $10^{atm},95$ à 1 atmosphère fera baisser la température de 284° à 141°,6, en la comptant du zéro absolu, ou bien de 10° à —132°,4, en partant de la glace fondante.

RÉFLEXIONS SUR LA CHALEUR PERDUE DANS L'EMPLOI DE L'AIR COMPRIMÉ.

14. Par l'effet de l'abaissement énorme de température produit par la dilatation rapide de l'air, le travail qu'on retire d'une masse d'air comprimé est bien inférieur au travail qu'on en retirerait, si la température demeurait constante.

Nous avons vu qu'un litre d'air en passant, sans addition externe de chaleur, de la pression de $6^{atm},65$ à la pression atmosphérique, ne développe que $60^{km},8$, tandis qu'il développerait $111^{km},5$ si la température était maintenue constante au moyen d'une addition externe de chaleur.

Le travail produit par la détente d'un litre d'air passant subitement de $10^{atm},95$ à 1 atmosphère est de $118^{km},5$, tandis qu'il serait de $231^{km},9$ si la température restait invariable.

Cette perte de travail produite par le refroidissement dans la détente est un inconvénient grave auquel est sujet l'emploi de l'air comprimé comme puissance motrice.

On tirerait un plus grand parti de l'air comprimé si, après la détente subite, on faisait travailler encore l'air pendant qu'il acquiert la température des corps environnants.

Pour nous expliquer, supposons qu'après l'expansion rapide de l'air de n atmosphères à 1 atmosphère, dont l'effet est de porter la température de l'air de T degrés, au-dessus du zéro absolu, à la température

$$T' = T\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{k}},$$

supposons, disons-nous, qu'on fasse agir l'air sous un piston, pendant qu'il reprend graduellement, aux dépens des corps environnants, sa température primitive T en le maintenant toujours à la pression atmosphérique. On obtiendra ainsi un travail égal à la pression atmosphérique sur le piston, multiplié par la différence des volumes de l'air qui correspondent à T' et à T degrés.

Ces volumes seront $n^{\frac{1}{k}}$ litres et n litres, si le volume de l'air avant l'expansion, sous la pression de n atmosphères, était d'un litre.

Par conséquent, le travail développé, pendant que l'air passe de la température T' à la température T sous pression constante, sera

$$h\left(n - n^{\frac{1}{k}}\right) = nh\left(1 - \frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right).$$

Ce travail s'ajoutera au travail

$$\frac{nh}{k-1}\left(1 - \frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right),$$

que produit la détente de l'air de n atmosphères à 1 atmosphère sans addition de chaleur. De cette manière, on

pourrait, par deux opérations successives, retirer d'un litre d'air comprimé à n atmosphères un travail exprimé par

$$\frac{knk}{k-1}\left(1-\frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right);$$

c'est-à-dire qu'on pourrait accroître l'effet utile, obtenu par la seule expansion rapide, dans la proportion de 1 à k ou de 1 à 1,41.

Ainsi le travail développé par un litre d'air à $6^{atm},65$ deviendrait $85^{km},7$ et le travail développé par un litre d'air à $10^{atm},95$ deviendrait $167^{km},1$.

Nous pensons qu'il ne serait pas impossible de trouver un moyen pratique pour utiliser ces 41 pour 100 de travail qu'on perd actuellement. On pourrait, par exemple, reprendre l'air, après sa détente rapide, pour le faire agir dans un second cylindre, à l'imitation de ce qui se pratique dans les machines à vapeur à deux cylindres de Woolf, ayant au préalable fait passer l'air, pour le porter à la température ambiante, à travers une série de tubes très-courts, placés les uns à côté des autres, et dans les intervalles desquels circulerait un courant d'eau. L'air entrerait froid dans les tubes par le bas et en sortirait à la température ambiante par le haut, d'où il passerait sous le piston du second cylindre.

C'est un problème qui mérite d'être étudié par les personnes qui s'occupent de mécanique industrielle, en raison du profit que la pratique en pourrait tirer.

Il importe de remarquer que la quantité de chaleur cédée par l'air aux corps environnants après la compression, pendant que celui-ci se refroidit, sous pression constante, dans le réservoir, est plus grande que la quantité de

chaleur que l'air absorbe des corps environnants après la dilatation, lorsqu'il se chauffe, à pression constante, pour reprendre sa température primitive. Par exemple, dans la compression et détente de l'air à $6^{atm},65$, tandis que l'air perd 208°,7 dans la première opération, il ne gagne que 120°,3 dans la seconde.

Il en résulte que dans la suite d'opérations par lesquelles l'air passe avant de revenir à son état primitif, il y a une certaine quantité de chaleur perdue et partant, une certaine quantité de travail mécanique équivalent perdue.

Ainsi le compresseur, considéré conjointement à la machine qui emploie la détente de l'air pour produire un effet utile donné, forme un système mécanique dont l'effet est de transformer une portion de travail mécanique en chaleur.

Afin de tirer le plus grand parti possible de l'air comprimé, il faudrait pouvoir recueillir cette chaleur qui se perd et l'employer à chauffer l'air lors de sa détente. A cet effet, on pourrait refroidir l'air après la compression, au moyen du même courant d'eau, dont on se servirait pour chauffer l'air après la détente. Il faudrait pour cela que l'appareil où se fait la détente fût près de la machine où s'opère la compression. Cette condition ne sera guère réalisable en pratique, puisque la destination de l'air comprimé dans l'industrie est le transport de la puissance motrice à distance.

NOTE.

Nous terminerons ce Mémoire en faisant remarquer que la considération de la chaleur engendrée dans le cycle d'opérations par lesquelles passe l'air, tour à tour comprimé et dilaté, peut fournir l'équivalent mécanique de la chaleur.

Cette remarque n'est peut-être pas nouvelle; cependant comme les théories modernes sur la transformation du travail mécanique en chaleur par équivalents, et *vice versa*, ne sont pas encore fort répandues (*), nous croyons utile d'entrer à cet égard dans quelques détails.

Les opérations par lesquelles passe l'air dans le compresseur et l'appareil qui utilise la détente sont les suivantes:

1° L'air est comprimé sans soustraction externe de chaleur;

2° L'air est refroidi jusqu'à la température ambiante sans changer la pression;

3° L'air est dilaté, sans addition externe de chaleur, jusqu'à la pression primitive;

4° L'air est chauffé à pression constante jusqu'à la température primitive.

Le travail produit par cette dernière opération n'est point recueilli maintenant par les machines qui utilisent la détente de l'air; mais nous ne devons point en faire abstraction.

Au bout de la quatrième opération, l'air étant revenu à son état initial, le travail moléculaire intérieur sera nul,

(*) Ceci se rapporte à l'année 1863.

et par conséquent le travail mécanique dépensé pendant les quatre opérations sera l'équivalent de la chaleur produite.

Il est visible que le travail dépensé correspondra à l'excès du travail dépensé dans les deux premières opérations sur le travail produit dans les deux dernières.

Maintenant, si l'on représente par P, V, T la pression, le volume, la température, au-dessus du zéro absolu, de l'air dans son état primitif, et si l'on désigne respectivement par P_1, V_1, T_1, par P_2, V_2, T_2, par P_3, V_3, T_3 et par P_4, V_4, T_4, la pression, le volume et la température à la fin des quatre opérations successives, nous aurons les expressions suivantes :

Travail dépensé dans la première opération $\frac{PV}{k-1}\left[\left(\frac{V}{V_1}\right)^{k-1}-1\right]$.

Travail dépensé dans la deuxième opération $P_1(V_1-V_2)$.

Travail produit par la troisième opération $\frac{P_2V_2}{k-1}\left[1-\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{k-1}\right]$.

Travail produit par la quatrième opération $P_3(V_4-V_3)$.

Or, nous avons, en vertu des lois qui régissent la force élastique et la température des gaz comprimés ou dilatés sans addition ni soustraction externe de chaleur, en faisant $\frac{P_1}{P}=n$,

$$V_1=V\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{k}}, \qquad P_1=nP, \qquad T_1=Tn^{1-\frac{1}{k}},$$

$$V_2=V\frac{1}{n}, \qquad P_2=nP, \qquad T_2=T,$$

$$V_3=V\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{k}}, \qquad P_3=P, \qquad T_3=T\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{k}},$$

$$V_4=V, \qquad P_4=P, \qquad T_4=T.$$

Par conséquent, nous aurons

Travail dépensé dans la première opération $\frac{PV}{k-1}\left(n^{1-\frac{1}{k}}-1\right)$.

Travail dépensé dans la deuxième opération $PV\left(n^{1-\frac{1}{k}}-1\right)$.

Travail produit par la troisième opération $\frac{PV}{k-1}\left(1-\frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right)$.

Travail produit par la quatrième opération $PV\left(1-\frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right)$.

Nous trouvons donc, pour la totalité du travail mécanique dépensé,

$$\frac{kPV}{k-1}\left(n^{\frac{k-1}{2k}}-n^{-\frac{k-1}{2k}}\right)^2.$$

Actuellement, si l'on désigne par c la capacité calorifique de l'air sous pression constante, et par ϖ le poids de l'unité de volume de l'air à la pression P et à la température T, la quantité de chaleur émise par l'air, pendant la deuxième opération, sera

$$c\varpi V(T_1-T);$$

et la quantité absorbée, pendant la quatrième opération,

$$c\varpi V(T_4-T_3).$$

Substituant les valeurs de T_1, T_3, T_4 en fonction de T, il vient

$$c\varpi V T\left(n^{1-\frac{1}{k}}-1\right),$$

$$c\varpi V T\left(1-\frac{1}{n^{1-\frac{1}{k}}}\right).$$

Il en résulte que l'excès de la chaleur perdue sur celle qui est absorbée sera

$$c\varpi V T\left(n^{\frac{k-1}{2k}}-n^{-\frac{k-1}{2k}}\right)^2;$$

c'est la chaleur produite par le travail dépensé

$$\frac{kPV}{k-1}\left(n^{\frac{k-1}{2k}}-n^{-\frac{k-1}{2k}}\right)^2$$

que nous avons calculé ci-dessus. Le travail mécanique J correspondant à une unité de chaleur sera donc

$$J=\frac{kP}{(k-1)c\varpi T}.$$

Soit ϖ_0 le poids du mètre cube d'air à la température de la glace fondante et à la pression atmosphérique P_0, α le coefficient de dilatation de l'air, on aura

$$\frac{P}{\varpi}=\alpha T\frac{P_0}{\varpi_0},$$

et par suite

$$J=\frac{\alpha k P_0}{(k-1)c\varpi_0}.$$

Tel est l'équivalent mécanique d'une calorie.

En posant

$$k = 1{,}41\,,$$

$$\alpha = \frac{1}{274}\,,$$

$$P_0 = 10333^{k}\,,$$

$$c = 0{,}2375\,,$$

$$\varpi_0 = 1^{k},293\,,$$

on obtient

$$J = 422^{km},3\,,$$

valeur qui ne s'écarte guère de celles qu'a trouvées expérimentalement M. Joule, dont la moyenne est en nombre rond

$$J = 424^{km}.$$

NOTE

SUR LE TRAVAIL MÉCANIQUE

DÉPENSÉ DANS LA COMPRESSION

et sur le

TRAVAIL RESTITUÉ PAR LA DÉTENTE D'UN GAZ PERMANENT

(*Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, vol. I — febbraio 1866).

On croyait autrefois, et il y a peut-être encore aujourd'hui des ingénieurs qui pensent que le travail mécanique, nécessaire pour comprimer un gaz, est égal au travail développé par sa détente.

Lorsqu'il s'est agi d'employer l'air comprimé pour transmettre le travail à distance, on a cru qu'on pourrait utiliser complétement, par la détente, tout le travail accumulé dans l'air au moyen de la compression.

Si les changements de volume d'un gaz s'opéraient assez lentement pour que le gaz fût toujours en équilibre de température avec les corps environnants auxquels il céderait son excès de chaleur en diminuant de volume, et auxquels il en emprunterait en se dilatant; ou, en d'autres termes, si les changements de volume avaient lieu à température constante, nul doute que le travail emprisonné dans le gaz par la compression ne fût intégralement restitué par

la dilatation; car le gaz reprendrait, en se dilatant, les mêmes pressions qu'il avait lors de la compression, en reprenant les mêmes volumes; mais il est impossible de remplir cette condition d'une température constante.

Tout le monde sait que pendant la compression, les gaz s'échauffent, et qu'ils se refroidissent pendant la dilatation. S'il était possible de coercer la chaleur développée par la compression, de manière que rien ne s'en échappât au dehors, les valeurs par lesquelles passerait la pression du gaz pendant la compression seraient égales à celles par lesquelles repasserait la pression du gaz pendant la dilatation: de sorte que le travail dépensé dans la compression (évidemment plus grand que celui qui est requis pour la compression à température constante) serait intégralement restitué dans la dilatation. Mais, pour cela, il faudrait disposer de vases absolument imperméables à la chaleur, ce qui est impossible en pratique, car on ne peut empêcher la chaleur produite pendant la compression de se transmettre aux corps environnants, surtout si la détente a lieu un certain temps après la compression.

Il arrivera donc que les pressions correspondantes aux mêmes volumes seront plus grandes dans la compression que dans la dilatation, et que par suite le travail dépensé sera plus grand que le travail restitué.

Le problème à résoudre, réduit à sa plus simple expression, est le suivant:

Une masse de gaz étant donnée, déterminer le travail nécessaire pour en réduire brusquement le volume. Ensuite, après qu'elle aura repris, sans changer de volume, la température ambiante, déterminer le travail qu'elle développera en revenant au volume primitif. On suppose que la compression et la dilatation aient lieu sans addition ni soustraction de chaleur du dehors.

Pour résoudre ce problème, il suffit de connaître la relation entre la pression et le volume d'un gaz qui change de volume sans recevoir du dehors ni émettre aucune quantité de chaleur. Cette relation a été donnée la première fois par LAPLACE dans le liv. XII, vol. V, *De la mécanique céleste*, et ensuite par POISSON dans le vol. II de son *Traité de mécanique*; mais le raisonnement employé par ces deux géomètres ne saurait plus être admis aujourd'hui qu'on a une connaissance plus intime de la manière d'agir de la chaleur.

En effet, ils admettaient que la chaleur reçue de l'extérieur, ou émise au dehors par un corps passant d'un état à un autre, ne dépend que de ces deux états. Maintenant il est prouvé que l'accroissement de chaleur dépend, non seulement de l'état initial et de l'état final, mais bien encore des états intermédiaires par lesquels le corps passe pour arriver de l'un à l'autre; de sorte qu'on ne saurait exprimer la quantité de chaleur en fonction des deux variables indépendantes, le volume et la température, sans donner en même temps une relation, entre ces variables, qui indique le chemin parcouru par le corps pour arriver de l'état initial à l'état final.

La vraie cause de la chaleur et du froid résultant des changements de densité, n'a pu être assignée que depuis l'avénement dans la science du principe de la transformation réciproque de la chaleur et du travail mécanique. Ce principe, dont les conséquences sont immenses dans la théorie de la chaleur, rend immédiatement compte de tous les phénomènes qui accompagnent la compression et la dilatation des corps. On en déduit avec la plus grande facilité les formules données par LAPLACE et par POISSON.

La chaleur communiquée à un corps se divise en quatre parties : une première partie s'ajoute à la chaleur intérieure

du corps, et y reste à l'état de chaleur; une deuxième partie produit un travail intérieur; une troisième partie développe un travail extérieur; enfin, une quatrième partie imprime une force vive.

La célèbre expérience de M. James Prescott Joule sur l'invariabilité de température d'un gaz qu'on dilate sans production de travail, a démontré que le travail intérieur peut être négligé dans les gaz.

Il en résulte que toute la chaleur transmise à un gaz est employée à produire une augmentation de température, et à effectuer un travail extérieur, si les molécules du gaz n'acquièrent aucune vitesse dans le changement d'état.

Par conséquent, toutes les fois que le passage d'un état à un autre a lieu sans addition ni soustraction de chaleur du dehors, la chaleur qui apparaît dans la compression d'un gaz est exactement l'équivalent du travail dépensé pour la compression, et la chaleur qui disparaît dans la dilatation d'un gaz est l'équivalent du travail extérieur effectué par la détente.

On a donc, en considérant une variation infiniment petite de volume,

$$p\,dv = -J\,c\,dt,$$

où p désigne la pression du gaz, v le volume spécifique, t la température absolue, c la capacité calorifique absolue, J l'équivalent mécanique de la chaleur.

On sait que pour les gaz permanents on a la relation

$$pv = Rt,$$

R étant une constante pour chaque gaz.

En éliminant p entre ces deux équations, on obtient

$$\frac{dv}{v} = -\frac{Jc}{R} \cdot \frac{dt}{t};$$

d'où l'on tire, en intégrant, à partir d'un état initial (v_0, t_0),

$$\frac{t}{t_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\frac{R}{Jc}};$$

ce qui donne la loi, suivant laquelle la température varie avec le volume.

On tire de là

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{1+\frac{R}{Jc}},$$

pour la relation entre la pression et le volume.

D'après cela, le travail mécanique développé par un gaz, qui passe du volume v_0 au volume v_1, sans recevoir de l'extérieur ni émettre au dehors aucune quantité de chaleur, sera

$$\int_{v_0}^{v_1} p\,dv = \frac{Jc}{R}\, p_0 v_0 \left\{1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\frac{R}{Jc}}\right\}.$$

Si

$$v_0 = n v_1,$$

le travail dépensé à réduire le volume d'un gaz, dans le rapport de n à 1, qu'il faut prendre avec le signe contraire au travail développé, sera exprimé par

$$\frac{Jc}{R}\, p_0 v_0 \left(n^{\frac{R}{Jc}} - 1\right);$$

et le travail restitué par la même masse de gaz qu'on laisse se dilater, après avoir acquis la température ambiante, jusqu'à reprendre le volume primitif, sera

$$\frac{Jc}{R} p_0 v_0 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R}{Jc}} \right\}.$$

Le rapport de ces deux travaux sera

$$n^{\frac{R}{Jc}}.$$

Afin d'appliquer ces formules à des cas particuliers, nous prendrons l'équivalent mécanique de la chaleur

$$J = 425^{km},$$

et nous prendrons, pour l'air atmosphérique,

$$R = 29,172,$$
$$c = 0^{cal.},1674.$$

Avec ces valeurs, on obtient

$$\frac{R}{Jc} = 0,41.$$

Au percement des Alpes, entre Bardonnèche et Modane, on travaille avec de l'air comprimé à 6 atmosphères environ. D'après la formule trouvée précédemment

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{1+\frac{R}{Jc}} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{1,41},$$

une telle compression correspond à une réduction de volume égale à

$$\frac{v_0}{v} = 3{,}563.$$

Dans de telles circonstances, on trouve

$$n^{\frac{R}{Jc}} = 1{,}684,$$

pour le rapport du travail dépensé au travail restitué; c'est-à-dire que la détente ne rend que le 59 pour cent du travail employé à la compression.

Bien que les choses ne se passent pas précisément ainsi au percement des Alpes, le résultat final est néanmoins le même. Après la compression, on y refoule l'air, sans changement de pression, dans les réservoirs, où il se refroidit à pression constante. L'air comprimé et refroidi est ensuite admis, sans changement de pression, dans les perforateurs, après quoi il opère sa détente sans recevoir ni émettre aucune quantité de chaleur.

Le travail dépensé pendant la compression est exprimé par

$$\frac{Jc}{R} p_0 v_0 \left\{ \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{R}{R+Jc}} - 1 \right\}.$$

Le travail dépensé pendant le refoulement est exprimé par

$$p_1 v_1;$$

et puisqu'on a

$$v_1 = v_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{Jc}{Jc+R}},$$

ce travail sera égal à

$$p_0 v_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{R}{R+Jc}}.$$

Le travail développé, pendant la période d'admission dans les perforateurs, sera égal à

$$p_0 v_0,$$

puisque la température est revenue à sa valeur initiale.

Le travail produit par la détente, depuis la pression p_1 jusqu'à la pression p_0, sera exprimé par

$$\frac{Jc}{R} p_0 v_0 \left\{1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{R}{R+Jc}}\right\}.$$

Le rapport de la somme des travaux dépensés à la somme des travaux restitués est égal à

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{R}{R+Jc}},$$

ou bien à

$$\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{\frac{R}{Jc}},$$

ainsi qu'on avait trouvé auparavant.

On voit par là combien est vain l'espoir de ceux qui croient à la possibilité de retirer de l'air comprimé tout le travail qu'a coûté sa compression.

Si cela était possible, le mouvement perpétuel serait trouvé, car le travail restitué étant égal au travail dépensé,

toute la chaleur produite par la compression serait obtenue sans dépense définitive de travail; et comme celle-ci pourrait être convertie en travail mécanique, au moyen d'une machine thermique, nous obtiendrions ainsi gratuitement une quantité de travail qui pourrait être augmentée indéfiniment.

Il n'est pas rare de voir, dans les Traités de physique, énoncer comme un principe que l'élévation de température, produite par la réduction de volume d'un gaz, est parfaitement égale à l'abaissement de température occasionné par le retour du gaz au volume primitif.

Rien n'est plus vrai, si l'on entend que la compression et la détente se fassent sans communication de chaleur à l'extérieur; mais rien n'est moins vrai, si l'on entend que la dilatation ait lieu après que toute la chaleur produite par la compression s'est dissipée dans les corps environnants.

Ici encore l'égalité de l'élévation et de l'abaissement de température conduirait au mouvement perpétuel. En effet, si les deux quantités de chaleur étaient égales, elles correspondraient à des travaux mécaniques égaux; de sorte que toute la chaleur, produite pendant la compression, ne coûterait en définitive aucun travail.

A l'aide des formules données plus haut, il est facile de trouver la différence entre l'élévation de température qui correspond à la compression, et l'abaissement correspondant à la dilatation.

Si n désigne, comme ci-dessus, le rapport des deux volumes avant et après la compression, on a

$$\frac{t_1}{t_0} = n^{\frac{R}{Jc}},$$

pour le rapport des deux températures absolues; d'où l'on déduit

$$t_1 - t_0 = t_0\left(n^{\frac{R}{Jc}} - 1\right),$$

pour l'élévation de température qui correspond à la réduction de volume.

Le gaz étant revenu à la température ambiante, si on le dilate brusquement jusqu'à son volume primitif, la température t_2 à laquelle il tombe, sera donnée par la formule

$$\frac{t_2}{t_0} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R}{Jc}};$$

d'où l'on déduit, pour l'abaissement de température,

$$t_0 - t_2 = t_0\left\{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{R}{Jc}}\right\},$$

ou bien

$$t_0 - t_2 = t_0\left(\frac{n^{\frac{R}{Jc}} - 1}{n^{\frac{R}{Jc}}}\right),$$

valeur évidemment moindre que celle de l'élévation de température.

Le rapport de l'élévation à l'abaissement de température sera

$$\frac{t_1 - t_0}{t_0 - t_2} = n^{\frac{R}{Jc}}.$$

Si l'on a, comme auparavant,

$$n = 3,563,$$

il vient

$$\frac{t_1 - t_0}{t_0 - t_2} = 1,684,$$

c'est-à-dire que, dans les circonstances de la compression et de la détente de l'air qui ont lieu au percement des Alpes, l'élévation de température est plus d'une fois et deux tiers l'abaissement.

Je ferai remarquer, en passant, que la connaissance expérimentale du rapport des deux variations de température pourrait servir à la détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. En effet, on tire de la formule précédente

$$J = \frac{R}{c} \cdot \frac{\log n}{\log (t_1 - t_0) - \log (t_0 - t_2)}.$$

En appliquant cette formule à une expérience faite par MM. Favre et Silbermann (*), laquelle a donné, pour le gaz hydrogène,

$$n = 2,$$
$$t_1 - t_0 = 18^0,5,$$
$$t_0 - t_2 = 13^0,7,$$

et en sachant que pour ce gaz

$$R = 421,195,$$
$$c = 2,410,$$

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, tom. XXXVII, 1853, pag. 480.

on trouve

$$J = 403^{km},3.$$

Il est curieux de voir la raison que MM. FAVRE et SILBERMANN donnent de l'inégalité qui existe entre la chaleur dégagée par la compression et le froid produit par la raréfaction. Selon ces deux habiles expérimentateurs, « lorsque « le gaz est subitement dilaté, l'abaissement de température « est moindre que l'élévation correspondante à la compres- « sion, parce que, dans le premier cas, la surface de con- « tact du gaz avec le corps de pompe est double de ce « qu'elle est dans le deuxième cas, tandis qu'il y a moitié « moins de molécules qui entourent le thermomètre ».

Ces circonstances doivent sans doute influer sur les résultats obtenus; elles tendent à augmenter l'inégalité entre l'échauffement et le refroidissement produits par des condensations et des dilatations égales d'un même gaz. Nous en avons une preuve dans les valeurs trop petites de l'équivalent mécanique de la chaleur qu'on déduit des variations de température obtenues par MM. FAVRE et SILBERMANN. Mais ces circonstances accessoires ne sont point la cause principale de l'inégalité dont il s'agit. Quand même on parviendrait à les faire disparaître, cette inégalité ne cesserait pas d'exister. La vraie cause de l'inégalité entre l'élévation de température produite par la compression d'un gaz et l'abaissement dû à la dilatation réside dans la différence des travaux qui y correspondent. Si cette inégalité n'existait point, le mouvement perpétuel deviendrait possible.

Il importe de remarquer que le mode d'expérimentation employé par MM. FAVRE et SILBERMANN ne saurait donner des résultats précis. En effet, ils estimaient les changements de température résultant des variations subites de volume, au moyen d'un thermomètre de BREGUET, contenu dans

l'intérieur du corps de pompe. Or, la masse de gaz mise en expérience était très-faible comparativement à la masse du thermomètre, de sorte que les résultats obtenus devaient être bien différents de ceux qui eussent été fournis par un thermomètre d'une masse nulle.

La méthode employée jadis par CLÉMENT et DESORMES, perfectionnée par GAY-LUSSAC et WELTER et renouvelée de nos jours par MM. TRESCA et LABOULAYE, est grandement préférable à celle de MM. FAVRE et SILBERMANN. Dans cette méthode, la température de l'air, au lieu d'être mesurée directement par un thermomètre, est déduite de la pression mesurée par un manomètre.

Elle consiste à renfermer dans un réservoir une certaine quantité d'air condensé, dont la force élastique surpasse la pression atmosphérique qui a lieu en dehors du réservoir. L'expérience se fait de la manière suivante :

1° On observe cette force élastique, que nous désignerons par p_0;

2° On ouvre un robinet qui fait communiquer l'intérieur du réservoir avec l'air extérieur, et, dans un temps très-court, une partie du fluide étant écoulée, et la pression intérieure étant devenue égale à p_1, on ferme le robinet;

3° Après avoir attendu le temps nécessaire pour que les corps environnants aient restitué la chaleur qui a disparu pendant l'écoulement, on observe la force élastique p_2 de l'air contenu dans le réservoir.

D'après la relation donnée plus haut entre la température et la force élastique, pendant la détente, sans addition ni soustraction de chaleur du dehors, on a

$$\frac{t_1}{t_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{R}{R+Jc}}.$$

Le volume qui correspond aux deux pressions p_1, p_2 restant le même, on aura

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{p_1}{p_2};$$

et puisque

$$t_0 = t_2,$$

il vient

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{p_1}{p_2}.$$

On aura donc

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{R}{R+Jc}},$$

d'où l'on déduit

$$J = \frac{R}{c}\left(\frac{\log p_0 - \log p_2}{\log p_2 - \log p_1}\right).$$

Pour que ces expériences donnent des résultats précis, il faut pouvoir agir sur de grands volumes d'air comprimé.

Il y a un endroit qui se prêterait admirablement à ces expériences, je veux parler des ateliers où l'on comprime l'air nécessaire aux travaux du percement des Alpes, entre Bardonnèche et Modane. Avec les masses d'air comprimé dont on y dispose et les moyens qu'on y possède, on pourrait s'y livrer aux expériences les plus utiles et les plus intéressantes, dans le but d'obtenir les constantes qui entrent dans les formules de la Thermodynamique, et de trouver les lois de l'écoulement des fluides élastiques.

Il est fort à désirer que les ingénieurs distingués qui président à cette œuvre grandiose qui fait beaucoup

d'honneur à notre pays, veuillent bien la faire servir aussi au progrès de la science; ils acquerraient, par là, un nouveau titre à notre reconnaissance (*).

Je terminerai cette Note, en demandant pardon à mes Confrères de les avoir entretenus d'un sujet aussi élémentaire que la compression et la dilatation des fluides élastiques. Mais comme les anciens errements n'ont pas encore fait complétement place, dans l'enseignement et dans les traités élémentaires, aux principes nouveaux de la Thermodynamique, j'ai pensé qu'il serait bon qu'une voix s'élevât du sein de cette savante compagnie pour recommander l'étude de la nouvelle doctrine qui est parvenue à réduire tous les modes de développer ou de consommer la chaleur à un seul: La transformation mutuelle de la chaleur et du travail mécanique.

(*) Malheureusement ces vœux n'ont pas été exaucés. La gigantesque entreprise du percement des Alpes Cottiennes, entre Bardonnèche et Modane, a été menée à bonne fin, sans qu'aucune des recherches scientifiques, qu'on aurait pu faire dans cette occasion, ait été abordée. (*Note de 1874*).

EFFETS THERMIQUES

DE LA TRACTION.

DES CHANGEMENTS DE TEMPÉRATURE

PRODUITS

DANS LES CORPS SOLIDES DE FORME PRISMATIQUE

PAR UNE TRACTION LONGITUDINALE

(*Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, vol. III - gennaio 1868).

On sait depuis longtemps que tous les corps dégagent de la chaleur quand on les comprime, et en absorbent quand on les dilate; mais ce n'est que depuis l'avénement de la nouvelle théorie mécanique de la chaleur qu'on est parvenu à expliquer, d'une manière rationnelle, ces phénomènes, et à en calculer les effets.

Cette théorie nous a délivrés du *calorique latent*, cet être mystérieux que les physiciens appelaient à leur secours, comme jadis les enchanteurs évoquaient les esprits.

Sans faire intervenir ce calorique qui tantôt se cache, tantôt se montre, selon les circonstances; et sans avoir recours non plus à des changements imaginaires dans la capacité calorifique des corps, nous expliquons aujourd'hui tous ces phénomènes d'apparition et de disparition de chaleur, par le principe de la conversion du travail mécanique en chaleur, et réciproquement de la chaleur en travail mécanique.

C'est à un des membres étrangers de cette Compagnie, à Mr. le Docteur JULES-ROBERT MAYER, de Heilbronn, que nous devons ce principe si fécond qui sera un des plus beaux titres scientifiques de notre époque.

M. WILLIAM THOMSON, qui a contribué pour une si large part au progrès de la Thermodynamique, a été le premier, à ce que nous croyons, à donner, en 1851 (*), une formule qui permet de calculer l'accroissement de température produit par un accroissement dans la pression exercée uniformément sur toute la surface d'un corps.

Si θ désigne l'accroissement de température, t la température absolue, α le coefficient de dilatation pour chaque degré de température, v le volume du corps sous l'unité de poids (1 kilogramme), ϖ l'accroissement de pression sur la surface du corps (ϖ sera exprimé en kilogrammes par mètre carré de surface), J l'équivalent mécanique d'une calorie et K la chaleur spécifique à pression constante, M. THOMSON a montré qu'on a

$$\theta = \frac{\alpha v t}{JK} \varpi .$$

Cette formule permet naturellement de déterminer aussi l'abaissement de température produit par une diminution de pression sur la surface du corps.

En 1858, M. JOULE, à qui nous sommes redevables de la démonstration expérimentale de l'équivalence de la chaleur et du travail mécanique, appliqua (**) cette formule aux légères variations de température que subissent des cylindres

---

(*) *Trans. of the R. Society of Edinburgh*, vol. XX, part. II.

(**) *On some Thermo-dynamic Properties of Solids.* Phil. Trans. of the R. Soc. of London, vol. 149.

formés de divers solides, sous l'action de forces appliquées à leurs deux bases qui les tirent dans le sens de la longueur.

Ces expériences faites sur beaucoup de corps, fer, acier, fonte, cuivre, plomb, gutta-percha, caoutchouc vulcanisé, bois de pin, bois de laurier, réduits en cylindres d'environ $0^m,3$ de longueur et $0^m,006$ de diamètre, donnèrent des résultats parfaitement d'accord avec la formule de M. THOMSON, au point que M. JOULE, dans un élan d'enthousiasme, s'écrie, en concluant son Mémoire, qu'une nouvelle ère est venue dans laquelle « le fameux système « philosophique de BACON sera en grande partie abandonné, et dans laquelle, au lieu d'arriver aux découvertes « par l'induction d'après l'expérience, nous arriverons à « la connaissance de la plus grande partie des faits nouveaux, en raisonnant par déduction des principes fondamentaux » (*).

Or, voici un physicien suédois, M. EDLUND, qui par de nouvelles expériences analogues à celles de M. JOULE vient jeter des doutes sur l'exactitude de la formule de M. THOMSON. M. EDLUND trouve (**) que les variations de température produites dans des fils de divers métaux, tirés dans le sens de la longueur, ne sont données par cette formule qu'à la condition de remplacer la constante J, qui représente l'équivalent mécanique de la chaleur par un nombre environ 1,6 fois plus grand ; et que « ce changement de la valeur de la constante provient « évidemment de ce que dans le calcul théorique on n'a

(*) « When the famous philosophical system of BACON will be to a great extent « superseded, and when, instead of arriving at discovery by induction from experiment, « we shall obtain our largest accessions of new facts by reasoning deductively from « fundamental principles » p. 130.

(**) *Ann. de Chim. et de Phys.*, 3e série, t. LXIV, p. 245, et 4e série, t. VIII, p. 257.

« pas tenu compte d'une manière convenable du travail « interne » (*).

D'après cela la formule de M. THOMSON ne saurait plus être considérée que comme une formule empirique.

Je me propose de faire voir que cette formule n'est point entachée du défaut que lui reproche M. EDLUND, et que le désaccord avec l'expérience doit être cherché ailleurs.

Avant tout je ferai remarquer que le phénomène, pour lequel M. THOMSON a établi sa formule, n'est pas identique avec celui qu'ont considéré MM. JOULE et EDLUND. Le cas traité par M. THOMSON est celui dans lequel le corps est comprimé uniformément sur toute sa surface, et la formule de ce savant fournit le moyen de calculer les variations de température correspondantes à un accroissement ou à une diminution de pression sur toute la surface, quand il n'y a ni addition, ni déperdition de chaleur.

Dans ce cas, il est clair que, lorsqu'on augmente la pression, on exerce sur le corps un travail mécanique qui doit se convertir en chaleur et en travail interne; et que, par contre, lorsqu'on diminue la pression, le corps développe un travail mécanique qui doit faire disparaître son équivalent en chaleur et en travail interne.

Mais la traction d'une verge prismatique dans le sens de la longueur ne peut pas s'assimiler au second cas ci-dessus d'une diminution de pression; car, en tirant une verge on exerce sur elle un travail mécanique, qui doit se convertir dans son équivalent en chaleur et en travail interne.

On voit donc que le cas traité par M. THOMSON est tout à fait différent de celui qu'ont considéré MM. JOULE et EDLUND.

(*) T. VIII, p. 292.

Toutefois la même formule s'y applique; mais il est nécessaire de le démontrer. Il est à présumer que ces deux physiciens ont aperçu la différence des deux cas et qu'ils ont appliqué la formule de M. THOMSON au phénomène de la traction, en s'en rendant bien compte. Cependant comme je n'ai trouvé nulle part qu'on ait signalé cette différence, je crois utile de démontrer de nouveau la formule à ce second point de vue.

Considérons une tige prismatique, ou cylindrique, suspendue verticalement à un point fixe, et attachée, à son extrémité inférieure, à un bras de levier presque horizontal, sur lequel on fait glisser un poids depuis l'axe du bras de levier jusqu'à son extrémité. De la sorte on peut exercer sur la tige un effort de traction croissant depuis zéro jusqu'à un certain poids donné.

A mesure qu'on éloigne le poids de l'axe du bras de levier, la tige s'allonge et subit un travail mécanique égal à la somme des efforts successifs multipliés par les allongements relatifs. Si l'on ne dépasse pas la limite de l'élasticité, les allongements sont sensiblement proportionnels aux poids qui tendent la tige, et par conséquent le travail mécanique exercé sur la tige sera simplement représenté par l'aire d'un triangle rectiligne, et mesuré ainsi par la moitié du produit de la plus grande charge, à laquelle la tige a été soumise, par l'allongement total.

Il est assez difficile de prévoir quels seront les effets thermiques produits par ce travail mécanique qu'on exerce sur la tige pour l'allonger. Au premier abord il semblerait que, puisqu'il y a disparition de travail mécanique, l'équivalent de celui-ci doit passer dans la tige et devrait se manifester par une élévation de température; mais, d'autre part, la tige en s'allongeant dépense une certaine quantité

de travail mécanique moléculaire qui doit faire disparaître une partie de la chaleur produite, si elle ne la fait pas disparaître tout entière et même au delà. L'expérience prouve, en effet, que pour certains corps, tels que les métaux, il y a refroidissement par la traction; tandis que pour d'autres, tel que le caoutchouc, il y a échauffement.

Il est évident que des effets thermiques inverses et parfaitement égaux doivent se produire lors de la contraction de la tige, en ramenant le poids vers l'axe du levier.

Mais, si après avoir tendu la tige, on détache entièrement son extrémité inférieure du bras de levier, alors la tige se contracte sans accomplir aucun travail mécanique extérieur; ses molécules reviennent à leurs positions primitives, animées de certaines vitesses, et oscillent autour de ces positions, mais se réduisent bientôt au repos.

Si la limite de l'élasticité n'a pas été dépassée, c'est-à-dire si l'extension n'a pas dépassé la limite, pour laquelle les molécules conservent la faculté de revenir à leur position primitive, la tige après être revenue à sa longueur primitive, sans accomplir aucun travail mécanique, se trouve dans le même état qu'au commencement de l'expérience, avant d'être soumise à la traction. Il s'ensuit que le travail mécanique qu'on a exercé sur la tige pour l'allonger doit se trouver intégralement sous la forme de chaleur dans la tige même, après la contraction. C'est ce qu'a réellement trouvé par l'expérience M. EDLUND.

En comparant le travail dépensé pour allonger des fils d'argent, de cuivre, de laiton, avec l'élévation de température produite dans la contraction sans travail, mesurée à l'aide d'une pile termo-électrique, il trouva que l'équivalent mécanique de la chaleur est en moyenne de 434 kilogrammètres. Ce résultat, parfaitement d'accord avec la

valeur admise généralement pour cet équivalent, prouve en faveur de l'exactitude des expériences de M. EDLUND.

Quant aux variations de température produites par la tension dans le sens de la longueur, et mesurées de même par une pile thermo-électrique, les expériences faites par ce savant sur des fils d'argent, d'acier, de cuivre, de laiton, de platine, d'or, ont montré que le fil chargé rapidement, mais progressivement, par la méthode décrite plus haut, éprouvait un abaissement de température proportionnel à la charge finale déterminée par l'action du poids, et, par conséquent, à son allongement final ; elles ont montré, en outre, qu'en déchargeant progressivement le fil, il revenait à sa longueur primitive en éprouvant une élévation de température égale à l'abaissement trouvé dans la première partie de l'expérience.

Voyons maintenant la manière dont on peut calculer ces effets calorifiques. Soit une tige prismatique ou cylindrique de longueur l, suspendue verticalement à un point fixe, et sollicitée, à son extrémité inférieure, par un poids p. Soumettons cette tige successivement aux opérations suivantes :

1° La tige étant protégée contre toute perte ou gain de chaleur, augmentons la traction exercée à son extrémité inférieure de dp, de manière à porter le poids qu'elle supporte de p à $p+dp$;

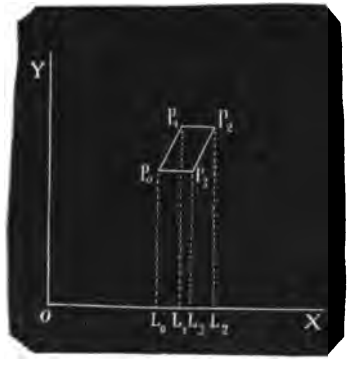
2° La tige étant maintenue sous la traction $p+dp$, communiquons-lui de la chaleur, jusqu'à ce que sa température augmente de dt;

3° La tige étant de nouveau protégée contre toute perte ou gain de chaleur, réduisons la traction de $p+dp$ à p;

4° La tige étant maintenue sous la charge p, soustrayons-lui de la chaleur, jusqu'à ce que sa température tombe de $t+dt$ à t.

Au bout de ces quatre opérations, la tige reviendra aux mêmes conditions physiques qu'au commencement, mais par leur moyen une certaine transformation de travail mécanique en chaleur, ou *vice versa*, aura eu lieu.

Si nous portons sur un axe OX les longueurs de la tige et sur un axe perpendiculaire OY les poids auxquels on la soumet, la suite des quatre opérations décrites ci-dessus sera représentée par le quadrilatère $P_0\ P_1\ P_2\ P_3$.



Pendant les deux premières opérations la tige parcourt les deux côtés $P_0\ P_1$, $P_1\ P_2$, et subit un travail mécanique représenté par l'aire $L_0\ P_0\ P_1\ P_2\ L_2$. Pendant les deux autres opérations, la tige parcourt les deux côtés $P_2\ P_3$, $P_3\ P_0$ et développe un travail mécanique égal à l'aire $L_0\ P_0\ P_3\ P_2\ L_2$. Somme toute, il y aura donc un travail exercé sur la tige égal à l'aire du quadrilatère infinitésimal $P_0\ P_1\ P_2\ P_3$.

Ce quadrilatère est un parallélogramme, car les deux côtés $P_0\ P_3$, $P_1\ P_2$ sont parallèles à l'axe OX, puisque la dilatation et la contraction, opérées par l'addition et la soustraction de chaleur, se font à tension constante; et de plus, ils ne diffèrent entre eux que de quantités infiniment petites du second ordre, qui s'évanouissent devant les quantités infiniment petites du premier ordre. Par conséquent, son aire sera égale à $P_0\ P_3$ multiplié par la différence des deux ordonnées $L_0\ P_0$, $L_1\ P_1$.

Or, en désignant par α le coefficient de la dilatation linéaire de la tige, dans le sens de la longueur, pour chaque degré de température, on aura

$$P_0 P_3 = \alpha l dt.$$

On a, en outre, pour l'accroissement de tension,

$$P_1 L_1 - L_0 P_0 = dp.$$

Donc l'aire du quadrilatère, qui représente le travail exercé sur la tige, sera égale à

$$\alpha l d t dp.$$

Le cas d'une tige formée d'une substance qui se raccourcirait par la chaleur, comme serait le caoutchouc, est naturellement compris dans cette formule, en admettant des valeurs négatives pour le coefficient α, et en faisant les changements relatifs dans la figure.

Je ferai remarquer, en passant, que si l'expérience n'était pas faite dans le vide, il faudrait tenir compte aussi du travail mécanique développé par la pression atmosphérique sur les faces du prisme; mais ce travail est si petit, comparativement au travail développé par la traction, qu'on peut le négliger sans erreur sensible.

A la fin du cycle que nous avons considéré, la tige étant revenue à sa condition physique primitive, le travail mécanique dépensé

$$\alpha l d t dp$$

doit s'être transformé en une quantité équivalente de chaleur

$$\frac{\alpha l d t dp}{J},$$

J étant l'équivalent mécanique d'une calorie, et partant $\frac{1}{J}$ l'équivalent thermique d'un kilogrammètre.

Le cycle que nous avons fait parcourir au corps est parfaitement réversible, c'est-à-dire qu'on peut le parcourir dans un sens ou dans l'autre. Pour le parcourir à l'inverse, on devrait: 1° élever de dt la température de la tige, sous une charge constante; 2° augmenter la traction de dp, sans permettre à la tige de donner, ni de prendre de la chaleur à l'extérieur; 3° refroidir la tige de dt sous la traction constante $p + dp$; 4° laisser revenir la tige à son état initial, en diminuant la tension.

Par ces quatre opérations, on gagnerait un travail mécanique égal à

$$\alpha l dt dp,$$

en dépensant une quantité de chaleur égale à

$$\frac{\alpha l dt dp}{J}.$$

Le cycle étant réversible, le principe de CARNOT doit s'y appliquer. Or, en vertu de ce principe, *le rapport de la chaleur, convertie en travail, à la chaleur totale puisée à la source supérieure, est égal au rapport de la différence des températures absolues des deux sources à la plus élevée de ces températures.*

Dans le cycle inverse $P_0 P_3 P_2 P_1$, la chaleur empruntée à la source, pendant que la tige parcourt le côté $P_0 P_3$, est égale à

$$w l K dt,$$

en désignant par w le poids de l'unité de longueur de la tige, et par K la chaleur spécifique à traction constante, de la substance de la tige.

La chaleur convertie en travail mécanique, dans le cycle complet, est égale, comme nous venons de le voir, à

$$\frac{a l d t d p}{J}.$$

Ainsi le rapport de la chaleur utilisée à la chaleur totale dépensée sera égal à

$$\frac{a d p}{J w K}.$$

Ce rapport doit être égal à la différence des températures entre lesquelles on opère, divisée par la plus élevée de ces températures, c'est-à-dire égal à

$$\frac{d t}{t}.$$

On aura donc l'équation

$$\frac{d t}{t} = \frac{a d p}{J w K},$$

qui fournit

$$d t = \frac{a t}{J w K} d p,$$

pour l'expression de l'abaissement de température produit par une traction subite sur une verge prismatique. C'est la formule qu'ont employée MM. Joule et Edlund, mais sans la justifier.

La formule serait la même, si le prisme solide était pressé sur les deux bases au lieu d'être tiré; alors dp changeant

de signe, il en serait de même de dt qui représenterait dans ce cas un accroissement de température.

La méthode que j'ai suivie pour parvenir à cette formule est calquée sur celle qui est indiquée par M. THOMSON dans une lettre adressée à M. JOULE, publiée dans les *Proceedings* de la Société Royale de Londres, en juin 1857 (*), pour établir la formule donnant les variations de température d'un corps, produites par un changement de pression sur toute sa surface.

Les formules qu'on obtient dans les deux cas sont identiques, pourvu que l'on substitue, à la pression exercée sur toute la surface, la traction exercée sur les deux bases du prisme; au coefficient de la dilatation cubique par la chaleur, le coefficient de la dilatation linéaire dans le sens de la longueur; et enfin, à la chaleur spécifique sous une pression constante, la chaleur spécifique sous une traction constante.

Les variations de température sont insignifiantes par rapport à la température absolue t, comptée à partir de $-274°$; de sorte qu'on peut considérer t comme constant sans erreur appréciable, et calculer l'abaissement fini de température θ correspondant à l'accroissement fini ϖ de traction à l'aide de la formule

$$\theta = \frac{t}{Jw}\int_0^{\varpi} \frac{\alpha}{K}\,dp.$$

MM. JOULE et EDLUND ont supposé constante la dilatation linéaire α, ainsi que la chaleur spécifique à tension constante K, en prenant celle-ci égale à la chaleur spécifique à

(*) Vol. VIII, p. 566, ou bien *Phil. Mag.*, vol. XV, 4e série.

pression constante, mesurée par les physiciens, et ils ont calculé l'abaissement de température au moyen de l'expression

$$\theta = \frac{t\,a}{J\,w\,K}\,\varpi.$$

Mais, comme je l'ai déjà dit, tandis que M. JOULE a trouvé un accord parfait entre les résultats de l'expérience et ceux qu'a fournis cette formule, M. EDLUND a trouvé que, pour faire cadrer ses résultats avec la formule, il fallait augmenter la valeur de J que l'on estime ordinairement à 425^{km}, et la porter à $682^{km},73$, ou, ce qui revient au même, qu'il fallait multiplier la formule par un coefficient égal à

$$\frac{425}{682,73} = 0,62.$$

Ce changement de la constante J provient, selon M. EDLUND, de ce qu'on n'a pas tenu compte d'une manière convenable du travail interne en établissant la formule.

Je ne puis me ranger à cette opinion, car, comme on vient de le voir, nous avons considéré, dans le raisonnement, une série de changements successifs telle que, l'état final et l'état initial étant identiques, le travail intérieur est nul. C'est l'artifice ingénieux de raisonnement dont l'invention est due à SADI CARNOT, qui permet d'établir des relations entre les propriétés mécaniques et thermiques des corps, sans en connaître la constitution intérieure.

Le désaccord entre la formule théorique et les résultats de l'expérience provient, ce me semble, d'une autre cause.

Je ferai remarquer d'abord que K désigne, dans le cas présent, la chaleur spécifique *à tension constante*, et que

rien n'autorise à la faire égale à la chaleur spécifique à *pression constante*, mesurée par les physiciens. De plus, nous ne savons pas si le coefficient α de la dilatation linéaire de la tige par la chaleur, dans le sens de la longueur, est le même, que la tige soit soumise ou non à une traction.

MM. Joule et Edlund ont donné à ces quantités les valeurs qu'on leur attribue dans les *Traités de physique*, sans noter que leur signification dans la formule est bien différente.

Il est très-possible, et même très-probable, que l'une et l'autre de ces quantités varient selon la tension de la tige. Cela étant, la valeur de

$$\frac{\alpha}{K},$$

au lieu d'être constante serait une fonction de p, et la valeur de θ serait donnée par l'équation

$$\theta = \frac{t}{Jw} M\left(\frac{\alpha}{K}\right) \varpi,$$

en désignant par

$$M\left(\frac{\alpha}{K}\right)$$

la moyenne arithmétique entre toutes les valeurs que $\frac{\alpha}{K}$ acquiert entre les deux limites 0 et ϖ.

Suivant les expériences de M. Edlund, on aurait

$$\frac{M\left(\frac{\alpha}{K}\right)}{\frac{\alpha}{K}} = 0{,}62,$$

c'est-à-dire que, pour les limites entre lesquelles ce savant a opéré, la moyenne des valeurs acquises par la quantité $\frac{\alpha}{K}$ serait les 62 centièmes de sa valeur correspondante à une tension nulle.

Les expériences de M. EDLUND, si elles sont exactes, ce que je ne mets pas en doute, nous conduisent donc à la conséquence que, des deux quantités α et K, l'une ou l'autre, ou toutes les deux à la fois, varient selon l'effort de traction auquel on soumet la tige.

Quant à la chaleur spécifique à tension constante K, je ne crois pas qu'elle puisse varier beaucoup en variant la tension. Si nous pouvions supposer constante la chaleur spécifique correspondante à une longueur invariable de la tige, on pourrait exprimer la valeur de K en fonction de p. Reprenons à cet effet la formule qui donne l'abaissement de température dont est accompagné un accroissement de traction. Nous l'écrirons sous la forme

$$dt = -\frac{\alpha l t}{JK} dp,$$

en désignant par l la longueur de l'unité de poids (1 kil.) de la tige, et en ayant égard à ce que dt et dp varient en sens inverse. Dans cette expression dt et dp sont liés par la condition que la traction s'opère sans addition ni soustraction de chaleur de l'extérieur.

Or la quantité de chaleur dQ, nécessaire pour amener la tige de la longueur l et de la traction p à la longueur $l+dl$, et à la traction $p+dp$, est exprimée par

$$dQ = K\left(\frac{dt}{dl}\right) dl + N\left(\frac{dt}{dp}\right) dp,$$

N étant la chaleur spécifique *à longueur constante*. Si la traction, la longueur et la température de la tige changent à la fois, sans addition ni soustraction de chaleur, on aura

$$K\left(\frac{dt}{dl}\right)dl+N\left(\frac{dt}{dp}\right)dp=0.$$

D'autre part, on a

$$dt=\left(\frac{dt}{dl}\right)dl+\left(\frac{dt}{dp}\right)dp,$$

ou bien, en substituant pour dt sa valeur en fonction de dp, et en multipliant par K,

$$-\frac{alt}{J}dp=K\left(\frac{dt}{dl}\right)dl+K\left(\frac{dt}{dp}\right)dp.$$

En soustrayant ces deux équations l'une de l'autre, et en divisant par dp, on obtient

$$\frac{alt}{J}=(N-K)\left(\frac{dt}{dp}\right),$$

d'où l'on tire

$$K=N-\frac{alt}{J}\frac{1}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}.$$

Le coefficient différentiel partiel $\left(\frac{dt}{dp}\right)$ n'est pas une

donnée directe de l'expérience, mais on peut l'exprimer par le coefficient

$$\left(\frac{dl}{dt}\right) = \alpha l$$

de la dilatation par la chaleur, la traction restant constante, et par le coefficient

$$\left(\frac{dl}{dp}\right) = \beta l$$

de l'allongement par la traction à température constante. En effet, nous avons

$$dl = \left(\frac{dl}{dt}\right) dt + \left(\frac{dl}{dp}\right) dp,$$

et, si nous supposons l constant,

$$\left(\frac{dl}{dt}\right) dt + \left(\frac{dl}{dp}\right) d = d\,0;$$

d'où l'on tire, pour le coefficient $\left(\frac{dt}{dp}\right)$, quand l est constant,

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) = -\frac{\left(\frac{dl}{dp}\right)}{\left(\frac{dl}{dt}\right)} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

En introduisant cette valeur dans l'expression de K, il vient

$$K = N + \frac{\alpha^2 l t}{\beta J},$$

expression qui nous fournit le moyen de calculer la chaleur

spécifique à traction constante, quand on donne la chaleur spécifique à longueur constante.

Appliquons cette formule aux expériences faites par M. Edlund sur un fil d'acier. On a, d'après ce physicien,

$$l = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{0,007189},$$

$$\alpha = 0,000010079,$$

$$t = 294.$$

La longueur du fil métallique, prise depuis la pince en acier qui fixe le fil au bras de levier, jusqu'à la partie inférieure du bras en fer dans lequel est vissée son extrémité supérieure, était de $0^m,566$. La tension était produite par un poids de $14,7795 \times 0,425 \times 9,2$. Sous l'influence de cette charge le fil s'allongea de $0^m,0019545$.

D'après cela, on aura pour l'allongement, par mètre de longueur et, par kilogramme de charge,

$$\beta = \frac{0,0019545}{0,566 \times 14,7795 \times 0,425 \times 9,2}.$$

On aura donc en nombres

$$\frac{\alpha^2 l t}{\beta J} = \frac{(0,000010079)^2 \times 294 \times 0,566 \times 14,7795 \times 0,425 \times 9,2}{0,007189 \times 0,0019545 \times 425}$$
$$= 0,000187.$$

Telle est la différence entre la chaleur spécifique à traction constante et la chaleur spécifique à longueur constante. La chaleur spécifique sous pression constante,

mesurée par les physiciens, est pour l'acier de 0,1138. On voit donc, que la différence entre les deux chaleurs spécifiques que nous avons à considérer n'atteint pas les deux milliè-mes de la capacité calorifique ordinaire.

Cela prouve, comme je l'avais avancé, que les variations de la chaleur spécifique, sous traction constante, ont dû être très-peu considérables dans ces expériences.

Si les variations de K sont négligeables, on est forcé, pour se rendre raison du résultat obtenu par M. Edlund, d'admettre que le coefficient α de la dilatation linéaire par la chaleur a dû varier considérablement selon la tension. Cela ne m'étonnerait pas, car je m'imagine que les molé-cules de la tige forment une sorte de réseau dont les mailles, ou losanges, se resserrent dans un sens quand on les allonge dans l'autre. Or, par l'accession de la chaleur, ces losanges doivent tendre à s'élargir dans les deux sens, mais, peut-être davantage dans le sens suivant lequel ils sont plus resserrés.

Si cela était, un prisme soumis à une traction, dans le sens de la longueur et, partant, contracté dans le sens de la largeur, se dilaterait par la chaleur dans les deux sens, mais moins dans le sens longitudinal que dans le sens perpendicu-laire. Dans le caoutchouc la dilatation transversale est telle qu'elle l'emporte sur la longitudinale; de sorte que le prisme, au lieu de s'allonger, se raccourcit par la chaleur, bien que le prisme entier augmente de volume. Dans les autres corps, particulièrement dans les corps inorganiques, cette différence de dilatation dans les deux sens sera moins marquée; mais elle pourra contrecarrer la dilatation longitudinale.

Ces idées sont de pures hypothèses sur lesquelles l'expé-rience seule pourra prononcer. Elles m'ont été suggérées par l'ingénieuse explication que notre confrère, M. Govi, a donnée des propriétés singulières du caoutchouc.

Je m'explique la différence des résultats obtenus par MM. JOULE et EDLUND par la circonstance qu'ils ont opéré entre des limites diverses. En effet, les abaissements de température obtenus par le second dépassaient trois dixièmes de degré, tandis que ceux qui ont été obtenus par le premier n'étaient que d'un dixième de degré environ. Dès lors, les variations de la quantité α devaient être beaucoup plus fortes dans les expériences de M. EDLUND que dans celles du physicien anglais.

Il serait très-intéressant de s'assurer jusqu'à quel point les conséquences auxquelles j'ai été conduit relativement aux variations que doit subir le coefficient de la dilatation linéaire par la chaleur, dans le sens de l'axe, d'un prisme soumis à une traction, seraient confirmées par l'épreuve directe.

Je pense qu'une manière simple de s'y prendre serait d'avoir deux ou plusieurs fils parfaitement pareils, d'y attacher des poids très-inégaux, après les avoir suspendus par leur extrémité supérieure, et de les faire osciller, en réglant leur longueur de manière à en rendre les oscillations synchrones, à une température donnée.

On les porterait ensuite à une température très-différente et on les ferait osciller de nouveau.

Si la dilatation linéaire n'était point influencée par la charge, leurs oscillations continueraient à être synchrones; mais si celles-ci ne l'étaient plus, on pourrait en déduire l'effet de la traction longitudinale sur la dilatation par la chaleur.

On éviterait ainsi la mesure directe de l'allongement des fils, opération toujours très-délicate.

Je serais heureux si ces considérations avaient pour effet d'engager quelque physicien, qui disposerait des moyens nécessaires, à s'occuper expérimentalement de cette question.

SECONDE PARTIE

HYPSOMÉTRIE.

FORMULE BAROMÉTRIQUE

D'APRÈS LES OBSERVATIONS DE M. GLAISHER.

FORMULE BAROMÉTRIQUE

RÉSULTANT DES OBSERVATIONS FAITES EN 1862,

PAR M. JAMES GLAISHER,

DANS HUIT ASCENSIONS AÉROSTATIQUES (*).

(*Philosophical Magazine*, vol. 27, series 4, London 1864)

La connaissance de la loi suivant laquelle la température des couches de l'atmosphère diminue, à mesure qu'elles sont plus élevées, est d'une grande importance; car la mesure des hauteurs par le baromètre ainsi que la théorie des réfractions atmosphériques en dépendent.

Dans l'état actuel de la météorologie, nous ne connaissons que les causes générales de l'abaissement de température de l'air de bas en haut; mais nous ignorons la valeur de leurs actions respectives.

Il est certain que la température moyenne de l'air en contact avec la surface terrestre doit être égale à celle de cette surface, et qu'à la limite supérieure de l'atmosphère, la température de l'air ne peut surpasser la température à laquelle ce fluide perd tout ressort.

(*) Traduit de l'anglais.

La première condition résulte du contact prolongé de la couche inférieure de l'atmosphère avec la surface terrestre.

La seconde est une condition nécessaire à l'équilibre d'une masse gazeuse: en effet, si l'air à la limite supérieure de l'atmosphère était encore expansible, la dernière couche se dissiperait dans l'espace; après quoi la couche immédiatement inférieure n'étant plus maintenue par aucune pression sur sa surface supérieure, se dissiperait aussi à son tour; et, successivement, toute l'atmosphère finirait par s'évanouir. C'est par le froid que les dernières couches de l'atmosphère doivent perdre leur ressort et être arrêtées dans leur fuite. Si l'équation de dilatabilité de l'air

$$p = \frac{\rho\,(1+\alpha\theta)}{\rho_0(1+\alpha\theta_0)}\,p_0\,,$$

qui lie la pression p à la densité ρ et à la température θ, au moyen du coefficient α de dilatation, était applicable à toutes les températures, la condition finale d'une pression nulle, jointe à une densité finie, serait donnée par la température

$$\theta = -\frac{1}{\alpha} = -461^\circ,2 \text{ Fahrenheit}\,.$$

C'est la température que l'on considère comme le zéro absolu dans la théorie mécanique de la chaleur (*).

(*) On prouve que l'atmosphère terrestre non-seulement ne saurait être illimitée, mais que sa hauteur est fort petite, comparée aux dimensions de notre globe.

Il est d'abord évident que si l'atmosphère était illimitée, nous n'aurions jamais une nuit complète; car la lumière du soleil venant à tomber sur des couches d'air suffisamment éloignées de la terre, pourrait toujours nous être renvoyée par la réflexion que ces couches lui feraient subir.

D'un autre côté, il est clair que l'atmosphère ne peut s'élever à la hauteur où la force centrifuge devient égale à la pesanteur, car les parties de l'atmosphère, situées

Entre la température à la surface de la terre et la température limite qui empêche l'expansion de la couche extrême de l'atmosphère, nous savons, par l'expérience, que la température de l'air décroît en allant de bas en haut, sauf quelques anomalies accidentelles qu'on observe dans les couches inférieures sujettes à être modifiées par le contact du sol.

La loi de ce décroissement, à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère, ne peut être connue qu'au moyen de l'expérience ; et la meilleure manière de l'étudier, c'est par des ascensions en ballon.

Les observations les plus importantes sur ce sujet qu'on ait faites jusqu'ici sont celles de M. GLAISHER dont une relation a paru dernièrement (*).

La conclusion générale de ces observations remarquables est que la température de l'air ne décroît pas uniformément suivant la hauteur, mais que ce décroissement se ralentit à mesure qu'on s'élève, ou, ce qui revient au même, que pour faire baisser le thermomètre d'un degré, il faut une

---

à cette hauteur et dans le plan de l'équateur, s'échapperaient, par la tangente, dans l'espace, pour être remplacées par d'autres, qui y arriveraient poussées par la force élastique de l'air inférieur, et qui s'échapperaient à leur tour, et ainsi de suite, jusqu'à épuisement complet de l'atmosphère. Or, la force centrifuge égale la pesanteur à la distance de 5,6 rayons terrestres, à partir de la surface ; par conséquent, l'atmosphère ne saurait avoir une épaisseur plus grande que 5,6 rayons terrestres. Mais tout nous porte à croire que cette épaisseur est beaucoup plus petite.

KEPLER imagina de déduire la hauteur de l'atmosphère de la durée des crépuscules. Cette méthode donne 79 kilomètres environ, pour l'épaisseur de la couche aérienne qui entoure notre globe, c'est-à-dire un quatre-vingtième à peu près du rayon terrestre.

Quelle que soit la hauteur de l'atmosphère, il faut, pour l'équilibre, qu'à la limite de l'atmosphère, l'air soit privé de tout ressort, pour empêcher sa propre expansion; et de plus, il faut que l'air y conserve une certaine densité pour retenir par son poids les couches inférieures. Toute hypothèse sur la constitution de l'atmosphère ne satisfaisant pas à cette condition finale d'une densité finie jointe à une force élastique nulle, est physiquement impossible. (*Addition de 1874*).

(*) *An account of Meteorological and Physical Observations in Eight Balloon-Ascents, made at the request of the Committee.* By James GLAISHER, F. R. S. (From the *Report of the British Association for the Advancement of Science for* 1862).

différence de hauteur progressivement croissante, à mesure qu'on est placé plus haut.

Or, la formule analytique généralement employée pour déterminer les hauteurs à l'aide du baromètre (la formule de DELUC ou de LAPLACE) suppose implicitement tout le contraire, c'est-à-dire que le décroissement de la température dans l'atmosphère s'accélère à mesure qu'on s'élève. Si l'on désigne par t_0 et t les températures absolues (au-dessus du zéro absolu qu'on estime à — 461°, 2 F.) des extrémités d'une colonne d'air dont la hauteur est x, la formule de LAPLACE est fondée sur l'hypothèse qu'on ait

$$x = b\,(t_0^2 - t^2)\,,$$

b étant une constante. D'après cette loi, l'accroissement de hauteur correspondant à l'abaissement d'un degré est exprimé par

$$\frac{x}{t_0 - t} = b\,(t_0 + t)\,;$$

c'est-à-dire, par une quantité décroissante avec la température t et conséquemment par une quantité d'autant plus petite que la hauteur est plus grande (*).

(*) On croit généralement que la formule de LAPLACE est basée sur un décroissement uniforme de température de bas en haut. C'est une erreur, ainsi que nous allons le faire voir.

La formule de LAPLACE s'obtient en supposant que l'atmosphère a partout une température constante et égale à la moyenne arithmétique des températures observées aux deux stations extrêmes.

Si l'on suppose t constant dans l'équation différentielle

$$k\frac{dp}{p} = -g\frac{dx}{t}$$

qu'on trouvera ci-après, pag. 165, on obtient, par l'intégration,

$$x = \frac{kt}{g}\log\frac{p_0}{p}$$

p_0 étant la pression barométrique à la station inférieure, origine des x.

La formule reçue étant incompatible avec les faits observés, il nous a semblé utile de chercher, pour l'évaluation des hauteurs, la formule qui résulte des observations de M. GLAISHER. Dans un autre mémoire, nous tâcherons de trouver la formule pour la réfraction atmosphérique qui découle des mêmes observations.

M. GLAISHER a trouvé, aux diverses hauteurs, pour le décroissement de température de l'air, à partir de la

---

En remplaçant t par la moyenne arithmétique des températures t_0, t, aux deux stations, il vient

$$x = \frac{h}{2g}(t_0 + t)\log\frac{p_0}{p}.$$

Telle est la formule de LAPLACE écrite avec les notations employées dans ce mémoire.

Afin de découvrir quelle est la loi de décroissement de la température qu'implique cette formule, nous la différentierons, après lui avoir donné la forme

$$\frac{x}{t_0+t} = \frac{h}{2g}\log\frac{p_0}{p}.$$

On obtient de la sorte

$$d\left(\frac{x}{t_0+t}\right) = -\frac{h}{2g}\frac{dp}{p}.$$

Mais, nous avons

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{h}\frac{dx}{t};$$

il viendra donc

$$d\left(\frac{x}{t_0+t}\right) = \frac{dx}{2t}.$$

En effectuant la différentiation indiquée, on trouve, après quelques réductions, l'équation

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2t\,dt}{t_0^2 - t^2},$$

dont l'intégrale est

$$x = b(t_0^2 - t^2),$$

b étant une constante arbitraire. *(Addition de 1874).*

surface terrestre, en prenant la moyenne de ses huit ascensions (*) :

HAUTEUR AU-DESSUS DU NIVEAU DE LA MER		CIEL CLAIR EN PARTIE		CIEL COUVERT	
A partir de	Jusqu'à	Décroissement de température	Hauteur moyenne pour l'abaissement de 1°	Décroissement de température	Hauteur moyenne pour l'abaissement de 1°
pieds anglais	pieds anglais	degrés Fahrenheit	pieds anglais	degrés Fahren.	pieds anglais
0	1 000	7.2	139	4.5	222
	2 000	12.5	160	8.7	230
	3 000	17.1	176	12.8	234
	4 000	20.5	195	16.5	242
	5 000	23.2	211	19.6	255
	6 000	26.0	230		
	7 000	28.8	243		
	8 000	31.5	254		
	9 000	34.1	263		
	10 000	36.7	272		
	11 000	39.3	279		
	12 000	41.9	286		
	13 000	44.4	293		
	14 000	46.6	300		
	15 000	48.7	308		
	16 000	50.8	314		
	17 000	52.7	322		
	18 000	54.5	330		
	19 000	56.3	337		
	20 000	57.8	346		
	21 000	59.1	355		
	22 000	61.4	358		
	23 000	62.4	368		
	24 000	63.7	377		
	25 000	64.8	386		
	26 000	65.8	396		
	27 000	66.8	404		
	28 000	67.7	413		
	29 000	68.5	423		
	30 000	70.0	428		

(*) Il n'est peut-être pas inutile de prévenir une objection qu'on pourrait faire à la méthode employée pour obtenir ces résultats. Les hauteurs renfermées dans la première colonne du tableau ont été calculées par la formule de LAPLACE, laquelle, comme nous l'avons vu, suppose une hypothèse contraire au décroissement réel de la température ; de sorte qu'elles sont entachées d'erreur. Cependant, il faut remarquer que les résultats fournis par cette formule, quoique incorrects, ne diffèrent guère des résultats exacts, particulièrement pour des hauteurs médiocres.

La méthode irréprochable de déterminer les hauteurs consisterait à partir de la

On peut représenter ces résultats par l'expression

$$x = a\,(t_0 - t) - b\,(t_0^2 - t^2)\,,$$

t_0 et t désignant les températures absolues des extrémités de la hauteur x. En effet, l'accroissement d'élévation qui en résulte, pour chaque degré d'abaissement de température, est exprimé par

$$\frac{x}{t_0 - t} = a - b\,(t_0 + t)\,,$$

ou par

$$\frac{x}{t_0 - t} = a - 2b\,t_0 + b\,(t_0 - t).$$

D'après cette expression la courbe dont l'abscisse est le décroissement de température $t_0 - t$, et l'ordonnée l'élévation qui correspond à un abaissement d'un degré, devrait être une ligne droite. Or, si l'on construit le lieu géométrique des résultats renfermés dans les deux dernières colonnes, on trouve que, par un ciel clair en partie, ce lieu est à peu près une ligne droite coupant l'axe des ordonnées à la distance d'environ 110 pieds de l'origine, et inclinée sur l'axe des abscisses d'un angle dont la tangente est 4,2 à peu près. Par un ciel couvert, la ligne droite coupe l'axe à la distance d'environ 214 pieds, et fait un angle dont la tangente est 1,8 à peu près.

Ainsi, l'on a, par un ciel clair en partie,

$$a - 2b\,t_0 = 110\,, \qquad b = 4{,}2\,;$$

---

relation existant entre la température et la pression barométrique, telle que la fournissent les observations directes faites pendant l'ascension en ballon, comme Sir JOHN HERSCHEL l'explique à l'article 27 et suiv. de sa *Meteorology*. Cependant la méthode par laquelle ce tableau a été calculé est assez correcte pour reconnaître si le décroissement de température est accéléré ou retardé ; et l'on peut être sûr de la conclusion générale qu'on en tire, savoir que ce décroissement se ralentit à mesure qu'on monte dans l'atmosphère.

et, par un ciel couvert,

$$a - 2bt_0 = 214\,, \qquad b = 1{,}8.$$

Si, avec ces paramètres, on calcule les hauteurs qui correspondent à une diminution de température d'un degré, on obtient la table suivante, contenant la différence entre les résultats obtenus et les résultats calculés :

HAUTEUR AU-DESSUS DU NIVEAU DE LA MER		CIEL CLAIR EN PARTIE		CIEL COUVERT	
A partir de	Jusqu'à	Hauteur moyenne calculée pour un abaissement de 1°	Différence entre la hauteur calculée et la hauteur observée	Hauteur moyenne calculée pour un abaissement de 1°	Différence entre la hauteur calculée et la hauteur observée
pieds anglais	pieds anglais	pieds anglais	pieds anglais	pieds anglais	pieds anglais
0	1000	140	+ 1	222	0
	2000	162	+ 2	230	0
	3000	182	+ 6	237	+ 3
	4000	196	+ 1	244	+ 2
	5000	207	— 4	249	— 6
	6000	219	— 11		
	7000	231	— 12		
	8000	242	— 12		
	9000	253	— 10		
	10000	264	— 8		
	11000	275	— 4		
	12000	286	0		
	13000	296	+ 3		
	14000	306	+ 6		
	15000	315	+ 7		
	16000	323	+ 9		
	17000	331	+ 9		
	18000	339	+ 9		
	19000	346	+ 9		
	20000	353	+ 7		
	21000	358	+ 3		
	22000	368	+ 10		
	23000	372	+ 4		
	24000	378	+ 1		
	25000	382	— 4		
	26000	386	— 10		
	27000	391	— 13		
	28000	394	— 19		
	29000	398	— 25		
	30000	404	— 24		

Des expériences ultérieures rendront peut-être nécessaire l'adjonction d'autres termes à l'expression représentant la loi de décroissement. Afin de conserver une plus grande généralité à cette expression, nous lui donnerons la forme

$$[1] \qquad x = a(t_0 - t) - b(t_0^2 - t^2) + c(t_0^3 - t^3) + \text{etc.}$$

Cela posé, nous allons chercher la formule barométrique qui en découle.

Si p désigne la pression de l'air d'une densité ρ, à la hauteur x où la gravité est g, on sait que l'équation d'équilibre d'une colonne d'air est

$$dp = -g\rho\,dx.$$

De plus, p est lié à ρ par la relation

$$p = h\rho t,$$

t étant la température absolue de l'air et h une constante.

On en déduit l'équation

$$h\frac{dp}{p} = -g\frac{dx}{t},$$

dont l'intégrale donnera la relation entre la pression p et la température t, lorsque x sera donné en fonction de t.

De l'équation [1] on déduit

$$dx = -a\,dt + 2bt\,dt - 3ct^2\,dt + \text{etc.},$$

et par suite

$$\frac{h}{g}\cdot\frac{dp}{p} = a\frac{dt}{t} - 2b\,dt + 3ct\,dt - \text{etc.}$$

En intégrant, il vient

$$\frac{h}{g}\log p = a\log t - 2bt + \frac{3}{2}ct^2 - \text{etc.} + \text{const.},$$

où les logarithmes sont hyperboliques.

En continuant à désigner par p_0 et t_0 la pression et la température absolue à la station inférieure, on a pour déterminer la constante, l'équation

$$\frac{h}{g}\log p_0 = a\log t_0 - 2bt_0 + \frac{3}{2}ct_0^2 - \text{etc.} + \text{const.}$$

Il s'ensuit qu'on obtient

$$[2]\quad \frac{h}{g}\log\frac{p_0}{p} = a\log\frac{t_0}{t} - 2b(t_0 - t) + \frac{3}{2}c(t_0^2 - t^2) - \text{etc.}$$

Maintenant, on peut déterminer le paramètre a au moyen des températures t_0 et t observées à la station inférieure et à la supérieure. En effet, de l'équation [1] on déduit l'expression

$$a = \frac{x}{t_0 - t} + b(t_0 + t) - c\frac{t_0^3 - t^3}{t_0 - t} + \text{etc.}$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation [2] fournit, pour la formule barométrique,

$$[3]\quad x = \frac{h}{g}\frac{t_0 - t}{\log\frac{t_0}{t}}\log\frac{p_0}{p} - b\left[t_0^2 - t^2 - 2\frac{(t_0 - t)^2}{\log\frac{t_0}{t}}\right] + c\left[t_0^3 - t^3 - \frac{3}{2}\frac{(t_0 - t)(t_0^2 - t^2)}{\log\frac{t_0}{t}}\right] + \text{etc.}$$

Selon les résultats de M. GLAISHER, les paramètres c, d, etc. doivent être fort petits. En s'arrêtant aux deux premiers termes, on obtient la formule

$$[4] \quad x = \frac{h}{g} \frac{t_0 - t}{\log \frac{t_0}{t}} \log \frac{p_0}{p} - b\,(t_0 - t)\left[t_0 + t - 2\,\frac{t_0 - t}{\log \frac{t_0}{t}} \right],$$

pour calculer la différence de niveau x entre deux stations dont on connaît la pression barométrique et la température.

Comme le terme entre les crochets est très-petit, il convient de remplacer

$$\log \frac{t_0}{t}$$

par la série très-convergente

$$\log \frac{t_0}{t} = \frac{2\,(t_0 - t)}{t_0 + t} + \frac{1}{3}\,\frac{2\,(t_0 - t)^3}{(t_0 + t)^3} + \text{etc.}$$

La formule barométrique devient de la sorte,

$$x = \frac{h}{g} \frac{t_0 - t}{\log \frac{t_0}{t}} \log \frac{p_0}{p} - \frac{1}{3}\, b\, \frac{(t_0 - t)^3}{t_0 + t},$$

en négligeant la seconde puissance de la fraction très-petite

$$\frac{t_0 - t}{t_0 + t}.$$

Le premier terme de la valeur de x est dû à un décroissement uniforme de température suivant la hauteur, et le second est dû au ralentissement de ce décroissement.

Il est bon d'observer que si l'on développe

$$\log \frac{t_0}{t},$$

dans le premier terme de x, il vient

$$x = \frac{h}{g}\left(\frac{t_0+t}{2}\right) \log \frac{p_0}{p} - \frac{h}{g}\left(\frac{t_0+t}{2}\right) \log \frac{p_0}{p} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{t_0-t}{t_0+t}\right)^2 - \frac{1}{3} b \frac{(t_0-t)^3}{t_0+t},$$

en ne s'arrêtant qu'à la troisième puissance de la fraction

$$\frac{t_0 - t}{t_0 + t},$$

parce qu'elle est multipliée par une quantité beaucoup plus grande que b.

Le premier terme représente la formule bien connue de LAPLACE. Ainsi, en désignant par X la hauteur que fournit la formule de LAPLACE, la correction à y introduire, pour avoir égard au ralentissement du décroissement de température, est exprimée par

$$-\frac{1}{3} X \left(\frac{t_0-t}{t_0+t}\right)^2 - \frac{1}{3} b \frac{(t_0-t)^3}{t_0+t}.$$

Cette correction, très-petite pour de petites différences de température entre les deux stations, c'est-à-dire pour de petites différences de niveau, ne peut plus être négligée pour des différences considérables de température et, par suite, de niveau.

Par exemple, pour un décroissement de

$$t_0 - t = 50^0,8 \text{ Fahr.},$$

correspondant à une hauteur de 16,000 pieds (hauteur peu éloignée de celle du mont Blanc), la correction est de 197 pieds, lorsqu'on pose

$$t_0 = 525^0, \qquad b = 4,2.$$

Pour

$$t_0 - t = 70^0,$$

correspondant à une hauteur de 30,000 pieds, la correction est de 541 pieds.

Quelle que soit la valeur de b dans l'expression [1], pourvu qu'elle soit positive, la correction à appliquer à la formule de LAPLACE est toujours négative. Or, après les observations de M. GLAISHER, il est impossible de supposer b négatif; par conséquent, toutes les hauteurs calculées dans les ascensions aérostatiques doivent être diminuées.

Il n'est pas certain que la même correction doive être appliquée à l'altitude des montagnes déduite d'observations barométriques. En effet, on doit admettre, comme règle générale, que la température de l'air à une station éloignée du terrain n'est pas la même qu'à une station située sur le flanc d'une montagne, à cause de l'influence de l'échauffement ou du refroidissement propre du sol.

Des observations thermométriques simultanées faites au sommet d'une montagne et dans l'air au même niveau, au moyen d'un ballon captif, pourraient éclaircir cette question.

Ce que l'observation a déjà prouvé, c'est que l'altitude d'une station, déduite d'observations barométriques, varie avec l'heure de la journée. De 1 heure après midi jusqu'à 3 heures du matin l'altitude va en diminuant, pour croître ensuite de cette heure jusqu'au moment du maximum, qui a lieu environ une heure après que le soleil a passé par le méridien de l'endroit (*).

Des observations du même genre devraient être répétées dans des endroits divers, variant par l'exposition et le climat. Il est à désirer que l'attention des voyageurs alpins soit attirée sur ce sujet.

On peut espérer beaucoup des efforts réunis des nombreuses personnes instruites qui fréquentent les plus hautes régions des Alpes et d'autres pays montagneux, maintenant que les clubs alpins se répandent partout.

Ce serait une occasion pour des personnes possédant des connaissances ordinaires, qui voudraient porter avec elles de bons instruments et les observer avec soin, de contribuer à l'avancement d'une branche des sciences qui est loin d'avoir atteint le degré de perfection désirable.

(*) Voyez PIAZZI SMYTH, *Astronomical Experiment on the Peak of Teneriffe* dans les *Phil. Trans. R. Society of London*, 1859. E PLANTAMOUR, *Mesures Hypsométriques dans les Alpes. Mém. de la Soc. de Physique et d'Histoire naturelle de Genève, 1860.* CHARLES MARTINS, *Sur l'influence de la distance et la correction horaire des différences de niveau, Archives scientifiques de la Bibliothèque universelle de Genève, 1860.*

FORMULE BAROMÉTRIQUE ET RÉFRACTION

DANS UNE ATMOSPHÈRE DONT LA DENSITÉ DÉCROIT EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

DE LA MESURE DES HAUTEURS PAR LE BAROMÈTRE

ET

DE LA RÉFRACTION ATMOSPHÉRIQUE

DANS UNE ATMOSPHÈRE DONT LA DENSITÉ DÉCROIT EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE (*).

(*Philosophical Magazine*, vol. 27, series 4, London 1864).

Dans un premier Mémoire publié dans le *Philosophical Magazine* (février 1864), nous avons signalé l'incompatibilité de la formule barométrique, généralement employée pour la mesure des hauteurs, avec la constitution de l'atmosphère qui résulte des observations faites par M. James Glaisher, dans ses ascensions aérostatiques, et nous avons montré la modification qu'il faut y introduire pour avoir égard à l'abaissement de température réellement observé en montant dans l'atmosphère.

Depuis lors, ayant calculé la densité des couches successives de l'atmosphère explorées par M. Glaisher, nous avons remarqué que la densité de l'air décroît à peu près

(*) Traduit de l'anglais.

uniformément à mesure que la hauteur augmente. Cette loi de la densité étant admise, la détermination des altitudes par le baromètre et celle de la réfraction atmosphérique est fort simplifiée. En effet, pour obtenir l'altitude dans ce cas, il suffit de diviser la différence des pressions aux deux stations par la demi-somme des poids spécifiques de l'air aux deux mêmes stations; et la trajectoire que décrit un rayon de lumière en traversant une atmosphère ainsi constituée est un arc d'hyperbole.

Cette loi de densité de l'atmosphère a été depuis longtemps employée par les géomètres, pour calculer la réfraction atmosphérique, en raison de la facilité qu'elle présente de rendre intégrable l'équation différentielle de la réfraction, et de l'accord des résultats qu'elle fournit avec l'observation directe; mais nous ne croyons pas qu'elle ait jamais été justifiée par des observations directes de la densité des couches successives de l'atmosphère, ni qu'elle ait été employée jusqu'ici dans la formule pour la mesure des hauteurs à l'aide du baromètre.

1. Constitution de l'atmosphère.

L'état d'une couche quelconque de l'atmosphère dépend de cinq quantités, savoir: de sa température t, de la pression p qu'elle supporte, de la tension ϖ de la vapeur aqueuse, de la densité ρ de cette même couche et de sa distance r du centre de la terre. Ces quantités sont liées entre elles par deux équations, dont la première est l'*équation d'équilibre*

$$[1] \qquad dp = -g\rho\, dr,$$

exprimant que le décroissement de la pression de l'air en s'élevant de la distance r à la distance $r+dr$ est égal au poids de la colonne d'air comprise entre r et $r+dr$.

La seconde est l'*équation de dilatabilité*

$$[2] \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{t_0}{t}\left(\frac{p - m\varpi}{p_0 - m\varpi_0}\right),$$

$1-m$ étant le rapport de la densité de la vapeur à la densité de l'air à la même température et à la même pression (selon GAY-LUSSAC

$$m = \frac{3}{8}\Big).$$

C'est l'expression des lois de MARIOTTE, de GAY-LUSSAC et de DALTON. La température est comptée du zéro absolu (— 461°, 2 FAHRENHEIT).

Maintenant, si l'on pouvait obtenir, expérimentalement ou par théorie, deux autres relations générales entre les cinq quantités mentionnées plus haut, les quatre premières, qui sont les éléments physiques des couches aériennes, se trouveraient assignables en fonction de la distance seule; de la sorte la constitution de l'atmosphère serait complétement définie. Si l'on négligeait la vapeur mêlée à l'air, une seule relation théorique ou expérimentale, ajoutée aux deux premières, suffirait pour déterminer la constitution de l'atmosphère.

La connaissance de ces relations requises peut s'obtenir expérimentalement par des ascensions en ballon, lorsqu'on observe simultanément le baromètre, le thermomètre et l'hygromètre dans un grand nombre de couches successivement traversées, sans en connaître aucunement l'élévation. En

effet, au moyen des valeurs de p, de t et de ϖ observées directement, on peut déduire, pour chaque couche, sa densité ρ, par le moyen de l'équation [2]; ensuite, si les observations sont assez nombreuses, on peut, par l'équation [1], au moyen des quadratures, obtenir la valeur de la distance r, qui correspond à chaque valeur de ρ et de p, t, ϖ. On peut de la sorte obtenir tous les éléments physiques de l'atmosphère, sans avoir recours à aucune hypothèse sur le décroissement de la chaleur ou de la densité.

Avant de faire l'application de cette méthode aux résultats de M. GLAISHER, il est bon de donner une autre forme à l'équation [1]. A cet effet, nous désignerons par l'indice inférieur o les quantités propres à la couche la plus basse d'air; et nous introduirons la constante auxiliaire h, telle qu'on ait

$$p_0 = g_0 \rho_0 h;$$

de manière que h représente la hauteur d'une atmosphère idéale de densité constante qui produirait la pression constatée par le baromètre dans la couche inférieure.

En ayant égard à la variation de la pesanteur suivant la hauteur verticale, on a

$$g = g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2.$$

Par conséquent l'équation [1] devient

$$d\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{r_0}{h} \frac{\rho}{\rho_0} d\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

En intégrant depuis p_0 jusqu'à p, et depuis r_0 à r, on trouve

$$\frac{r_0}{r}\left(r - r_0\right) = h\int_p^{p_0} \frac{\rho_0}{\rho}\, d\left(\frac{p}{p_0}\right);$$

et en faisant

$$\frac{r_0}{r}\left(r - r_0\right) = x,$$

on obtient, à la place de l'équation [1], l'équation suivante:

$$[3] \qquad x = h\int_p^{p_0} \frac{\rho_0}{\rho}\, d\left(\frac{p}{p_0}\right).$$

Nous ferons observer que la valeur de $\frac{r_0}{r}$ est toujours très-voisine de l'unité, dans toute l'étendue de l'atmosphère; de sorte que x représente approximativement la différence de niveau entre les deux stations.

La table suivante renferme les moyennes des résultats que M. GLAISHER a obtenus, en 1862, dans ses huit ascensions aérostatiques (*).

(*) *An account of Meteorological and Physical Observations in eight Balloon-Ascents, made at the request of the Committee.* By JAMES GLAISHER F. R. S. London, 1863.

Table I. — *Résultats des observations faites par M.* GLAISHER *sur la température et l'état hygrométrique de l'air à chaque 1000 pieds de hauteur.*

HAUTEUR calculée par la formule de LAPLACE	CIEL CLAIR EN PARTIE		CIEL COUVERT	
	Décroissement de température	Humidité relative de l'air	Décroissement de température	Humidité relative de l'air
pieds anglais	degrés Fahr.		degrés Fahr.	
0	0	63	0	77
1000	7.2	68	4.5	77
2000	12.5	77	8.7	77
3000	17.1	76	12.8	80
4000	20.5	76	16.5	80
5000	23.2	69	19.6	83
6000	26.0	68		
7000	28.8	64		
8000	31.5	58		
9000	34.1	52		
10000	36.7	52		
11000	39.3	48		
12000	41.9	48		
13000	44.4	43		
14000	46.6	58		
15000	48.7	53		
16000	50.8	45		
17000	52.7	33		
18000	54.5	21		
19000	56.3	36		
20000	57.8	33		
21000	59.1	32		
22000	61.4	21		
23000	62.4	16		
24000	63.7			
25000	64.8			
26000	65.8			
27000	66.8			
28000	67.7			
29000	68.5			
30000	70.0			

Afin d'éviter un cercle vicieux, on doit écarter les hauteurs calculées par la formule de LAPLACE, laquelle est fondée sur une loi de décroissement de la chaleur en contradiction avec les observations de M. GLAISHER, et il faut trouver la pression qui correspond à chaque température et à chaque état d'humidité. A cet effet, il faut faire l'opération inverse de celle qu'a employée M. GLAISHER pour calculer les hauteurs. L'altitude z étant connue, la pression qui y correspond est donnée par la formule

$$\log \frac{p}{p_0} = - \frac{z}{60159 \left(1 + \frac{\theta + \theta' - 64}{900}\right)},$$

où θ et θ' désignent les températures du thermomètre de FAHRENHEIT.

En opérant de la sorte, nous avons obtenu le tableau suivant, qui présente les températures, les pressions et les densités rapportées aux éléments analogues au niveau de la mer, pris pour unité de chaque espèce.

Table II. — *Donnant le décroissement de température, de pression et de densité aux diverses altitudes.*

CIEL CLAIR EN PARTIE						CIEL COUVERT					
TEMPÉRATURE	PRESSION DE L'AIR HUMIDE	PRESSION DE LA VAPEUR	DENSITÉ DE L'AIR HUMIDE	HAUTEUR PAR LES QUADRATURES		TEMPÉRATURE	PRESSION DE L'AIR HUMIDE	PRESSION DE LA VAPEUR	DENSITÉ DE L'AIR HUMIDE	HAUTEUR PAR LES QUADRATURES	
				Sans avoir égard à la variation de la pesanteur	En ayant égard à la variation de la pesanteur					Sans avoir égard à la variation de la pesanteur	En ayant égard à la variation de la pesanteur
		pouces		pieds	pieds			pouces		pieds	pieds
1.0000	1.0000	0.39	1·0000	0	0	1.0000	1.0000	0.48	1.0000	0	0
0.9863	0.9648	0.33	0.9788	1002	1002	0.9914	0.9649	0.41	0.9739	1002	1002
0.9763	0.9305	0.30	0.9540	2001	2001	0.9835	0.9308	0.35	0.9476	2002	2002
0.9675	0·8971	0.25	0.9286	3000	3000	0.9757	0.8976	0.31	0.9215	3003	3003
0.9610	0.8648	0.22	0.9013	3994	3995	0.9686	0.8653	0.27	0.8952	4005	4006
0.9559	0.8335	0.18	0.8738	4987	4988	0.9628	0.8341	0.25	0.8683	5002	5003
0.9506	0.8032	0.16	0.8469	5978	5980						
0.9453	0.7737	0.14	0.8206	6974	6976						
0.9401	0.7453	0.11	0.7951	7964	7967						
0.9352	0.7177	0.09	0.7700	8957	8961						
0.9303	0.6911	0.08	0.7454	9945	9950						
0.9253	0.6652	0.07	0.7215	10939	10945						
0.9204	0.6402	0.06	0.6982	11931	11938						
0.9156	0.6161	0.05	0.6754	12919	12927						
0.9114	0.5928	0.06	0.6527	13907	13916						
0.9074	0.5703	0.05	0.6309	14894	14905						
0.9035	0.5486	0.04	0.6096	15879	15891						
0.8997	0.5277	0.03	0.5890	16861	16875						
0.8964	0.5076	0.015	0.5688	17839	17854						
0.8930	0.4879	0.02	0.5487	18832	18849						
0.8902	0.4694	0.02	0.5296	19798	19817						
0.8877	0.4515	0.02	0.5108	20767	20788						
0.8833	0.4338	0.01	0.4934	21760	21783						
0.8814	0.4172	0.008	0.4756	22725	22750						
0.8789	0.4011	.....	0.4586	23696	23723						
0.8769	0.3857	.....	0.4420	24659	24688						
0.8750	0.3709	.....	0.4260	25619	25650						
0.8731	0.3566	.....	0.4105	26582	26616						
0.8713	0.3429	.....	0.3954	27539	27575						
0.8698	0.3297	.....	0.3809	28497	28536						
0.8670	0.3167	.....	0.3671	29476	29518						

Pour calculer la première et la deuxième colonne, on a supposé qu'au niveau de la mer, on eût

$$t_0 = 526^0,\ 2\ ,\ p_0 = 30 \text{ pouces.}$$

La troisième colonne a été calculée, au moyen des tables de M. REGNAULT de la force élastique de la vapeur. La quatrième a été calculée au moyen de l'équation [2] et la cinquième au moyeu de l'équation [3]. La sixième donne la valeur de $r_0 - r$, ou de l'altitude lorsqu'on n'a pas égard à la variation de la gravité.

La hauteur d'une atmosphère homogène, à la température de la glace fondante, sous la pression de 30 pouces de mercure, a été supposée de 26254 pieds; de sorte qu'à la température absolue t_0, sous la pression p_0, et avec un mélange de vapeur à la pression ϖ_0, la hauteur sera

$$h = 26254\ \frac{t_0\, p_0}{493,2\ (p_0 - m\,\varpi_0)}\ .$$

Dans le cas du ciel clair en partie, on avait

$$t_0 = 526^0,2\ ,\ p_0 = 30^p\ ,\ \varpi_0 = 0^p,39\ ;$$

et par conséquent

$$h = 28148 \text{ pieds}\ .$$

Dans le cas du ciel couvert, on avait

$$t_0 = 526^0,2\ ,\ p_0 = 30^p\ ,\ \varpi_0 = 0^p,48\ ;$$

et par conséquent

$$h = 28180 \text{ pieds}\ .$$

C'est avec ces valeurs de h qu'ont été calculées les hauteurs x contenues dans la cinquième colonne.

En comparant les deux tableaux I et II on voit que les hauteurs calculées par la formule de LAPLACE sont plus fortes que les hauteurs réelles, et qu'ainsi il faut faire à cette formule une correction négative, comme nous l'avions déjà annoncé dans notre premier Mémoire. Tant que la hauteur est médiocre, la différence est petite; mais elle devient importante aux grandes hauteurs. A 13000 pieds (hauteur surpassant de peu celle du mont Viso), la différence est déjà de 73 pieds; et à 16000 (un peu plus que la hauteur du mont Blanc) la différence s'élève à 109 pieds.

Si ensuite, on examine, dans le tableau II, la série des densités, on voit qu'elles décroissent d'abord plus rapidement que les hauteurs ne croissent, jusqu'à environ 5000 pieds, et que de là elles décroissent moins rapidement que les hauteurs; mais qu'en somme elles décroissent presque uniformément à mesure que les hauteurs augmentent.

Pour calculer la réfraction astronomique, les géomètres ont fait diverses hypothèses sur la loi suivant laquelle la densité des couches de l'atmosphère diminue à mesure qu'on s'élève au-dessus du niveau des mers. THOMAS SIMPSON suppose que la densité des couches atmosphériques décroît en progression arithmétique quand les hauteurs suivent une progression semblable. BESSEL fait décroître la densité en progression géométrique. LAPLACE admet une loi de décroissement qui participe à la fois des deux progressions précédentes. IVORY suppose qu'il existe entre la température et la densité la relation

$$\frac{t}{t_0} = 1 - f\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right),$$

où f est une constante qui dépend de la proportion avec laquelle la température décroît à mesure que la hauteur augmente.

Dans le but d'établir une comparaison entre ces diverses lois, nous avons calculé le tableau suivant donnant les densités successives aux diverses hauteurs qu'on en déduit.

Table III. — *Donnant le décroissement de densité à diverses altitudes suivant différentes lois.*

HAUTEUR	DENSITÉ DE L'AIR								
	Observée	Décroissement uniforme	Différence	Bessel	Différence	Laplace	Différence	Ivory	Différence
pieds anglais									
0	1.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000
5000	0.8734	0.8867	+0.0133	0.8367	—0.0367	0.8649	—0.0085	0.8714	—0.0020
10000	0.7441	0.7734	+0.0293	0.7000	—0.0441	0.7366	—0.0075	0.7514	+0.0073
15000	0.6286	0.6601	+0.0315	0.5857	—0.0429	0.6188	—0.0098	0.6434	+0.0148
20000	0.5257	0.5468	+0 0211	0.4900	—0.0357	0.5131	—0.0126	0.5515	+0.0258
25000	0.4363	0.4335	—0.0028	0.4100	—0.0263	0.4205	—0.0158	0.4681	+0 0318
30000	0.3597	0.3202	—0.0395	0.3430	—0.0167	0.3411	—0.0186	0.3939	+0.0342
Somme des carrés des différences . . .			0.0040	.....	0 0074	.....	0.0010	.....	0.0031

Les densités consignées dans la deuxième colonne de ce tableau sont déduites par interpolation de celles de la table II, de manière à avoir les altitudes en progression arithmétique. Les chiffres de la troisième colonne ont été calculés par la formule

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - a\,x\,,$$

dans laquelle le coefficient a, déduit par la méthode des moindres carrés, a pour valeur

$$a = 0{,}00002266.$$

Les densités résultant des diverses hypothèses ont été respectivement calculées par les équations suivantes:

Hypothèse de BESSEL $\quad \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-(0{,}000035666)\,x}$.

Hypothèse de LAPLACE
$$\begin{cases} \frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + (661{,}107)\,u\right] e^{-(1348{,}04)\,u}, \\ x = (20886860)\,u + 6138\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right). \end{cases}$$

Hypothèse d'IVORY
$$\begin{cases} \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-u} \\ x = (22384)\,u + 14922\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right). \end{cases}$$

En jetant les yeux sur la Table III, on voit que la loi de décroissement uniforme s'approche beaucoup de la loi réelle de décroissement. A la vérité, la diminution de densité est plus lente, à mesure qu'on monte; mais la loi de décroissement uniforme est sensiblement exacte depuis le niveau

de la mer jusqu'à la hauteur de 30000 pieds; tandis que l'hypothèse de BESSEL diffère encore plus de l'observation directe. Nous pensons que, sans chercher des lois plus compliquées, telles que les lois de LAPLACE et d'IVORY, on peut fort bien adopter la loi de la simple proportionnalité, pour le calcul, par le baromètre, de hauteurs qui n'atteignent jamais à cette limite de 30000 pieds, ainsi que pour la détermination de la réfraction atmosphérique, laquelle, comme on le verra plus loïn, ne dépend que des premières couches d'air ne s'étendant pas fort loin de la surface de la terre.

C'est la même hypothèse qui a été adoptée par LAPLACE, pour la détermination de la réfraction terrestre (*).

Nous allons maintenant examiner les conséquences qui découlent de cette loi relativement à la pression et à la température des couches successives de l'atmosphère.

En introduisant la loi de densité

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - a x ,$$

dans l'équation générale de l'équilibre des couches atmosphériques

$$d\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{1}{h}\,\frac{\rho}{\rho_0}\,dx ,$$

il vient, après l'intégration,

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \frac{1}{2ah}\left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right].$$

(*) *Mécanique céleste*, vol. IV, p. 277.

A la limite supérieure de l'atmosphère, la pression p doit être nulle : de sorte que la densité de la couche extrême est donnée par

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{1 - 2ah}\,.$$

Afin que cette densité soit une quantité finie et réelle, comme l'exige l'équilibre de la dernière couche de l'atmosphère, il faut que $2ah$ soit moindre que l'unité, c'est-à-dire il faut qu'on ait

$$a < \frac{1}{2h}\,.$$

La valeur que nous avons adoptée

$$a = 0{,}00002266,$$

étant plus grande que

$$\frac{1}{2h} = 0{,}00001776\,,$$

rend imaginaire la valeur de $\frac{\rho}{\rho_0}$ qui correspond à

$$p = 0.$$

Dans ce cas, la densité devient nulle à la hauteur

$$x = \frac{1}{a} = 44131 \text{ pieds}\,,$$

qui correspond à la pression

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \frac{1}{2ah} = 0{,}2161\,;$$

de sorte que la densité s'annulle avant la pression, ce qui est physiquement impossible. Il s'ensuit que l'équilibre de la couche extrême ne saurait exister. Mais nous ne devons pas perdre de vue que, pour notre but de déterminer des hauteurs et des réfractions, il suffit que la loi adoptée représente la constitution de l'atmosphère dans la première enveloppe d'air près de la surface terrestre; et qu'il est inutile de considérer les couches plus élevées qui n'ont aucune action sensible sur les quantités qu'il s'agit de déterminer (*).

(*) Nous devons faire remarquer que la formule de LAPLACE, étendue jusqu'aux limites de l'atmosphère, mène à des conséquences tout aussi absurdes.

En effet, cette formule suppose, entre la hauteur x et la température t, la relation

$$t = \sqrt{t_0^2 - \frac{x}{b}},$$

ainsi que nous l'avons fait voir dans la note de la pag. 160. D'après cela, la température va en décroissant, à mesure qu'on s'élève, dans l'atmosphère, jusqu'à la hauteur

$$x = b\,t_0^2,$$

qui la rend nulle. Au delà, la température devient imaginaire; de sorte que l'atmosphère ne peut dépasser cette hauteur.

De l'équation de LAPLACE écrite avec les notations employées dans ce mémoire, savoir :

$$x = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)\log\frac{p_0}{p},$$

et de la relation

$$x = b\,(t_0^2 - t^2),$$

on déduit, par l'élimination de t,

$$p = p_0\, e^{\frac{2bt_0}{h}(t - t_0)},$$

équation qui nous montre que depuis la station inférieure, où l'on a simultanément

$$t = t_0\,,\ p = p_0\,,$$

Quant à la température, si l'on néglige la vapeur aqueuse, ou si l'on en suppose la tension partout proportionnelle à la tension de l'air sec, on aura

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho t}{\rho_0 t_0} ;$$

par conséquent

$$\frac{t}{t_0} = \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{1}{2ah}\left(\frac{\rho_0}{\rho} - \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

---

la pression va en diminuant sans cesse, à mesure que t diminue, jusqu'à l'extrémité de l'atmosphère où l'on a en même temps

$$t = 0, \quad p = p_0 \, e^{-\frac{2bt_0^2}{h}} .$$

Ainsi, aux limites de l'atmosphère, la pression conserve une valeur finie, ce qui est absurde ; car l'air en vertu de son ressort ne pourrait ne pas s'étendre plus loin.

A cette première absurdité à laquelle conduit la formule de LAPLACE, nous allons en ajouter une autre qu'on découvre en examinant la marche de la densité de l'air à mesure qu'on s'élève. Si l'on remplace p par sa valeur

$$p = p_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0} ,$$

on obtient l'équation

$$\rho = \rho_0 \frac{t_0}{t} e^{\frac{2bt_0}{h}(t - t_0)} ,$$

laquelle nous montre qu'à l'extrémité de l'atmosphère, on a, en même temps,

$$t = 0, \quad \rho = \infty .$$

Depuis la station inférieure, où

$$t = t_0, \quad \rho = \rho_0 ,$$

la densité va d'abord en décroissant, à mesure que t diminue, jusqu'à

$$t = \frac{h}{2bt_0} ,$$

En introduisant la valeur de ρ en fonction de x, il vient

$$\frac{t}{t_0} = \frac{2h - 2x + ax^2}{2h(1 - ax)};$$

d'où l'on tire

$$\frac{x}{t_0 - t} = \frac{2h}{t_0}\left(1 + \frac{2ah - 1}{2 - 2ah - ax}\right).$$

---

où elle atteint un minimum ; ensuite elle va en croissant, jusqu'à l'extrémité de l'atmosphère, où elle devient infinie. C'est ce qui résulte de l'expression du premier coefficient différentiel

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{2bt_0}{h} - \frac{1}{t},$$

qu'on tire de la valeur précédente de la densité.

Il est évident qu'une pareille constitution de l'atmosphère est physiquement impossible, car la première condition de l'équilibre de l'atmosphère exige que la densité de l'air aille en diminuant de bas en haut : sans cela les couches les plus denses couleraient au-dessous des moins denses.

Nous ajouterons que, pour que la densité de l'air aille en diminuant de bas en haut, dans l'atmosphère, il est nécessaire que le décroissement de la température soit plus lent que de 1° chaque 29^m, 172 d'élévation. Pour le démontrer, supposons qu'on se demande quelle est la loi de décroissement de la température qui correspond à une atmosphère homogène, c'est-à-dire à une atmosphère où la densité est partout la même. Dans une telle atmosphère, l'équation d'équilibre (3) devient

$$x = h\int_p^{p_0} d\left(\frac{p}{p_0}\right) = h\left(1 - \frac{p}{p_0}\right),$$

et l'équation de dilatabilité

$$\frac{p}{p_0} = \frac{t}{t_0}.$$

On en tire

$$x = h\left(1 - \frac{t}{t_0}\right),$$

C'est la hauteur dont il faut s'élever pour faire baisser la température d'un degré. On voit qu'elle augmente à mesure que la hauteur croît, comme cela doit être conformément aux observations de M. GLAISHER.

Nous allons maintenant nous occuper de la recherche de la formule pour évaluer les hauteurs à l'aide du baromètre.

---

pour l'expression de la hauteur, et

$$\frac{x}{t - t_0} = \frac{h}{t_0},$$

pour l'expression de la hauteur qui correspond à la diminution de 1° dans la température.

On voit par là qu'une atmosphère homogène entraîne avec elle un décroissement de température uniforme de 1° pour une élévation égale à

$$\frac{h}{t_0}.$$

Il est clair qu'un décroissement plus rapide que celui-là entraîne avec lui une densité croissante de bas en haut.

Pour réduire en nombres la hauteur

$$\frac{h}{t_0},$$

nous rappellerons que

$$h = \frac{p_0}{g_0 \rho_0};$$

ainsi, on aura

$$\frac{h}{t_0} = \frac{p_0}{g_0 \rho_0 t_0}.$$

Il suffira donc de connaître la densité de l'air, dans un lieu donné, qui correspond à une pression et à une température donnée, pour réduire en nombres cette expression.

n verra plus loin qu'on a

$$\frac{p_0}{g_0 \rho_0 t_0} = 29^m, 172.$$

(Addition de 1874).

II. Formule barométrique.

L'équation d'équilibre de l'atmosphère, en ayant égard à la variation de la pesanteur, est

$$dp = -g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \rho\, dr\,,$$

g_0 étant la gravité à la station inférieure. En faisant, comme auparavant,

$$x = \frac{r_0}{r}(r - r_0),$$

il vient

$$dp = -g_0 \rho\, dx.$$

Si l'on admet qu'on a

$$\rho = \rho_0 (1 - a x)\,,$$

on obtiendra

$$dp = -g_0 \rho_0 (1 - ax)\, dx\,;$$

d'où, en intégrant, l'on tire

$$p_0 - p = g_0 \rho_0 x \left(1 - \frac{ax}{2}\right).$$

En éliminant a entre cette équation et l'avant-dernière, il vient

$$x = \frac{2}{g_0}\left(\frac{p_0 - p}{\rho_0 + \rho}\right).$$

On aurait pu arriver directement à cette expression, sans se servir du calcul infinitésimal, par la simple considération que le poids de la colonne d'air comprise entre les deux stations doit être égal à la différence de pression de l'air à ces deux stations.

Comme la densité de l'air n'est pas donnée directement par les instruments employés dans les nivellements barométriques, il faut remplacer ρ par sa valeur

$$\rho = \frac{p - m\varpi}{ct}.$$

On aura ainsi, pour la formule barométrique,

$$x = \frac{2c}{g_0} \frac{p_0 - p}{\frac{p_0 - m\varpi_0}{t_0} + \frac{p - m\varpi}{t}}.$$

Les pressions p_0 et p sont fournies par la hauteur de la colonne de mercure dans le baromètre aux deux stations. Si H_0 et H désignent ces hauteurs réduites à la température de la glace fondante, g_0 et g les gravités aux mêmes stations, Δ la densité du mercure, on aura

$$p_0 = g_0 \Delta H_0 , \qquad p = g \Delta H ,$$

et

$$g = g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2.$$

Les pressions ϖ_0 et ϖ de la vapeur contenue dans l'air aux deux stations s'obtiennent, soit par l'observation du point de rosée, soit par la température d'un thermomètre à boule mouillée.

La constante c est donnée dès que l'on connaît la densité de l'air qui correspond à une température donnée. A 45 degrés de latitude, au niveau de la mer, à la température de la glace fondante et sous la pression de $0^m,76$, M. REGNAULT a trouvé que le rapport du poids du mercure au poids de l'air est 10517,3. En admettant — 274 C., pour le zéro absolu, on aura, en mesures métriques,

$$c = \frac{p}{\rho t} = \frac{(0,76)\,\Delta G}{274\,.\,\rho} = \frac{(0,76)\,(10517,3)\,G}{274},$$

ou bien

$$c = (29,172)\,G;$$

et en mesures anglaises

$$c = (53,173)\,G,$$

G étant la pesanteur à 45° de latitude et au niveau de la mer. Selon BESSEL

$$G = 9^m,80604 = 32^p,172.$$

Si λ est la latitude du lieu où l'on fait l'observation, on aura, pour la pesanteur correspondante,

$$g_0 = G\,(1 - 0,0026\cos 2\lambda)\left(\frac{R}{r_0}\right)^2,$$

où

$$R = 6366786^m = 20888780^p\ (*)$$

est le rayon de la terre à 45° de latitude.

(*) ARAGO, *Astr. Pop.*, vol. III, p. 341.

Par conséquent, la formule complète pour l'évaluation des hauteurs est

$$r-r_0=A(1+0{,}0026\cos 2\lambda)\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\left(\frac{r}{r_0}\right)\frac{H_0-H\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}{\frac{H_0-m\eta_0}{t_0}+\frac{H\left(\frac{r_0}{r}\right)^2-m\eta}{t}},$$

η et η_0 désignant la force élastique de la vapeur en millimètres ou en pouces, suivant les mesures employées. On a pour la constante,

$$A=58^{m},344=106^{p},346.$$

Lorsque la station supérieure est à la surface de la terre, il faut augmenter le facteur

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^2,$$

pour avoir égard à l'attraction de la portion de terrain qui se trouve entre les deux stations. Suivant Poisson (*), on doit remplacer ce facteur par l'expression

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{r-r_0}{r_0}\right),$$

ou approximativement, à cause de la petitesse de la fraction

$$\frac{r-r_0}{r_0},$$

par l'expression

$$1-\frac{5}{4}\left(\frac{r-r_0}{r_0}\right).$$

(*) *Traité de Mécanique*, vol. I, n° 255; vol. II, n° 629.

La même remarque s'applique à la fraction

$$\left(\frac{R}{r_0}\right)^2,$$

lorsque la station inférieure est à la surface de la terre.

Dans la plupart des cas, on peut négliger la variation de la pesanteur, mais alors il faut augmenter légèrement le coefficient A, par exemple de $\frac{1}{300}$, d'une manière analogue à ce qu'on fait pour la formule barométrique ordinaire.

Lorsque le degré d'humidité aux deux stations n'est pas connu, on peut employer la formule très-simple

$$x = A\,\frac{H_0 - H}{\frac{H_0}{t_0} + \frac{H}{t}},$$

en augmentant quelque peu la constante A pour y comprendre la correction due à l'effet de l'humidité. Un accroissement de $\frac{1}{200}$ correspond à une force élastique de la vapeur aux deux stations de $\frac{1}{75}$ des pressions atmosphériques respectives.

La valeur du coefficient A, y compris les deux corrections, pour la variation de pesanteur et pour la présence de la vapeur aqueuse, devient ainsi

$A = 58{,}8$ en mesures métriques,

$A = 107{,}2$ en mesures anglaises.

III. Réfraction atmosphérique.

On sait que si la surface de la terre était plane, et que si par conséquent les couches aériennes étaient planes et parallèles, l'effet de l'atmosphère, sur un rayon de lumière qui la traverserait, dépendrait seulement de la densité de l'air aux deux extrémités de ce rayon, quelle que pût être la constitution des couches intermédiaires. A l'aide de la seule loi de la constance du rapport du sinus d'incidence et de réfraction, la valeur de la réfraction astronomique serait immédiatement connue, lorsque la densité de l'air au lieu de l'observation est donnée par les indications du baromètre et du thermomètre. Pour évaluer la réfraction terrestre, il faudrait en outre connaître l'état de l'air au point de mire.

A cause de la grandeur du rayon terrestre, la surface de la terre est sensiblement plane, dans une certaine étendue, tout autour d'un observateur, et de même les couches d'air sont sensiblement planes et parallèles, dans une certaine étendue, autour de la verticale passant par l'observateur. Voilà pourquoi la réfraction astronomique, jusqu'à la distance zénithale d'environ 74°, est à peine influencée à un degré perceptible par la constitution spéciale de l'atmosphère.

Près de l'horizon, le même rayon de lumière rencontre les diverses couches de l'atmosphère dans des parties qui sont loin d'être parallèles; c'est pourquoi on ne peut déterminer la déflexion qu'elles causent sans connaître l'arrangement de leurs densités. Mais heureusement la réfraction

dépend presque entièrement de la portion inférieure de l'atmosphère, seule accessible à l'observation, et n'est pas affectée sensiblement par les régions élevées.

Dans un Mémoire sur les réfractions, imprimé en 1823, dans les *Transactions philosophiques* de la Société de Londres, IVORY signala le premier, comme une conséquence de ses calculs, le résultat singulier que « les réfractions ne subissent presque aucun changement dans toutes les atmosphères comprises dans la formule » qu'il admit pour représenter le décroissement de densité; « quoique leur hauteur croisse depuis environ vingt-cinq milles, jusqu'à l'infini » (*).

Par la suite, dans un Mémoire publié en 1836 (**), BIOT a montré que la cause physique de ce fait est la suivante :

Concevons une trajectoire lumineuse quelconque arrivant à l'observateur sous une distance zénithale donnée: et suivons-la, par la pensée, en remontant avec elle dans les différentes couches d'air. A mesure que nous nous éloignons de la surface terrestre, l'angle que la courbe fait avec le rayon vecteur, dirigé vers le centre de la terre, diminue progressivement. Il est évident qu'en continuant à remonter la trajectoire lumineuse, on doit arriver à un point où cet angle ne dépasse plus 74°, ou toute autre distance zénithale au delà de laquelle la réfraction n'est plus influencée par l'atmosphère placée au-dessus, et ne dépend que de la densité à cette altitude. On voit par là que la réfraction dépend seulement de la constitution des couches inférieures, et nullement de celle du reste de l'atmosphère.

(*) *Philosophical Transactions of the Royal Society of London for 1823*, part. 2, p. 451.

(**) *Connaissance des Temps pour l'an 1839.*

On pourrait objecter à cette explication de Biot que, pour atteindre l'angle de 74°, il faut remonter à une très-grande élévation. Par exemple, il faut remonter à la hauteur de $\frac{1}{25}$ du rayon terrestre, pour atteindre l'angle d'incidence de 74°, sur la trajectoire lumineuse qui arrive horizontalement à la surface de la terre. Il est fort probable que l'atmosphère ne s'étend pas aussi loin. Mais on doit remarquer qu'une fois arrivé à une certaine élévation, la ténuité extrême de l'air rend la valeur de la réfraction si petite qu'on peut fort bien supposer qu'elle dépend seulement de la densité de l'air à cette élévation, quoique l'angle d'incidence ne soit pas encore réduit à la limite de 74°.

Afin d'éclaircir cela par un exemple, considérons un rayon de lumière arrivant horizontalement à l'observateur. Par un calcul facile, que nous expliquerons plus loin, on trouve qu'à l'altitude de 30000 pieds (hauteur que M. Glaisher a atteinte), l'angle d'incidence est réduit à 87° 8′ 25″, et que l'angle au centre de la terre compris entre les deux rayons vecteurs est de 3° 18′ 32″. Il s'ensuit que l'angle fait par la première tangente avec la tangente menée à la trajectoire lumineuse à l'altitude de 30000 pieds, ou, en d'autres termes, la valeur de la réfraction produite par l'enveloppe d'air de l'épaisseur de 30000 pieds, est de 26′ 57″.

Or, si l'on suppose que les couches aériennes au delà de 30000 pieds sont planes et parallèles, par la simple loi de la réfraction, savoir de la constance du rapport des sinus, on trouve que la lumière, passant directement du vide dans l'air d'une densité de 0,358 existant à 30000 pieds, subit une déflexion de 7′ 25″. En ajoutant ce chiffre à la réfraction due à la couche inférieure d'air, on obtient 34′ 22″ pour la réfraction totale horizontale.

La réfraction due à toute l'atmosphère étant de 33′ 37″, la

différence n'est que de 45″. En remontant un peu plus loin, on finit par arriver à une altitude où la considération des couches ultérieures serait inutile.

La conséquence à tirer de tout ce raisonnement, c'est que, quant à la réfraction astronomique, il suffit de connaître la constitution d'une enveloppe d'air d'une épaisseur comparativement petite. Les observations de M. GLAISHER nous fournissent cette connaissance jusqu'à 30000 pieds, ce qui est bien suffisant pour notre but. Quant aux réfractions terrestres, on n'a jamais à observer des objets terrestres au delà des couches aériennes que M. GLAISHER a explorées. Donc, nous possédons des données suffisantes pour calculer les deux réfractions.

Lorsqu'on admet la loi d'un décroissement de densité uniforme de bas en haut, le chemin que parcourt un rayon de lumière est un arc d'hyperbole dont le foyer intérieur est au centre des couches d'air, ainsi que nous allons le prouver. Mais nous ferons auparavant une observation par rapport aux vapeurs aqueuses mêlées avec l'air.

LAPLACE a été le premier à remarquer que l'effet de l'humidité de l'air sur la réfraction est très-peu sensible ; l'excès de la puissance réfractive de la vapeur aqueuse sur celle de l'air, étant compensé en grande partie par sa plus petite densité. Ce qui a été confirmé expérimentalement par BIOT et ARAGO. Il s'ensuit que, quant à la puissance réfractive de l'air, on peut substituer l'air sec à l'air humide à la même température et à la même pression.

D'après ce principe, nous avons calculé la Table IV à la place de la Table III, pour tout ce qui concerne les effets optiques de l'air.

Table IV. — *Décroissement de la densité de l'air, considéré comme sec, aux diverses altitudes, et comparaison de différentes lois de décroissement.*

HAUTEUR	DENSITÉ DE L'AIR								
	Observée	Décroissement uniforme	Différence	Bessel	Différence	Laplace	Différence	Ivory	Différence
pieds anglais									
0	1.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000
5000	0.8715	0.8862	+0.0147	0.8367	—0.0348	0.8649	—0.0066	0.8714	—0.0001
10000	0.7416	0.7724	+0.0308	0.7000	—0.0416	0.7366	—0.0050	0.7514	+0.0098
15000	0.6262	0.6587	+0.0325	0.5857	—0.0405	0.6188	—0.0074	0.6434	+0.0172
20000	0.5234	0.5449	+0.0215	0.4900	—0.0334	0.5131	—0.0103	0.5515	+0.0281
25000	0.4342	0.4311	—0.0031	0.4100	—0.0242	0.4205	—0.0137	0.4681	+0.0339
30000	0.3580	0.3173	—0.0407	0.3430	—0.0150	0.3411	—0.0169	0.3939	+0.0359
Somme des carrés des différences			0.0043	.....	0.0065	.....	0.0007	.....	0.0036

On en déduit, par la méthode des moindres carrées, le rapport du décroissement,

$$a = 0{,}00002276,$$

lequel devra être employé toutes les fois qu'il s'agit d'effets optiques, en reservant la valeur

$$a = 0{,}00002266$$

trouvée précédemment, pour les conditions d'équilibre qui dépendent du poids.

Nous allons maintenant passer à la recherche de la courbe que décrit la lumière dans son passage à travers l'atmosphère.

Soit r le rayon vecteur mené du centre de la terre à un point quelconque de la trajectoire lumineuse ; v l'angle formé par le rayon vecteur avec la verticale passant par l'observateur ; θ l'angle que fait la tangente de la trajectoire avec la même verticale ; v' l'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur ; ρ la densité de l'air au point que l'on considère ; $4k$ le pouvoir réfringent propre de l'air atmosphérique sous la densité 1 ; et r_0, θ_0, ρ_0 les valeurs de r, θ, ρ au point où la trajectoire pénètre dans l'œil de l'observateur.

La détermination de la trajectoire lumineuse dépend de l'équation

$$\frac{r_0 \sin \theta_0}{r \sin v'} = \frac{\sqrt{1+4k\rho}}{\sqrt{1+4k\rho_0}},$$

où

$$r_0 \sin \theta_0 \quad , \quad r \sin v'$$

désignent les perpendiculaires menées du centre de la terre sur les tangentes qui font, respectivement avec le rayon vecteur, les angles θ_0 et v'.

En introduisant la loi de décroissement de la densité exprimée par

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - ax = 1 - ar_0\left(\frac{r-r_0}{r}\right),$$

et en faisant, pour abréger,

$$\alpha = \frac{2k\rho_0}{1+4k\rho_0},$$

il vient

$$\frac{1}{(r\sin v')^2} = \frac{2\alpha a}{\sin^2\theta_0}\cdot\frac{1}{r} + \frac{1-2\alpha a r_0}{(r_0\sin\theta_0)^2}.$$

Maintenant, on sait que, dans l'hyperbole, on a la relation

$$\frac{1}{N^2} = \frac{2A}{B^2}\cdot\frac{1}{r} + \frac{1}{B^2},$$

entre la perpendiculaire N menée du foyer sur la tangente, et les deux demi-axes A et B de l'hyperbole.

Il s'ensuit que la trajectoire lumineuse est une hyperbole dont le foyer est au centre de la terre, et dont les demi-axes sont

$$A = \frac{\alpha a r_0^2}{1-2\alpha a r_0},$$

$$B = \frac{r_0\sin\theta_0}{\sqrt{1-2\alpha a r_0}}.$$

L'équation polaire, autour du centre de la terre, de la trajectoire lumineuse sera donc

$$r = \frac{A(e^2-1)}{1+e\cos\varphi},$$

φ étant compté à partir du sommet, et où

$$e^2 = \frac{A^2+B^2}{A^2} = 1 + \frac{\sin^2\theta_0}{\alpha^2 a'^2 r_0^2}(1-2\alpha a r_0).$$

Soit V l'angle formé par le grand axe de l'hyperbole avec la verticale de l'observateur. L'angle V ainsi que l'angle v se mesurent à partir de la verticale, dans le sens suivant lequel le rayon vecteur va en croissant. On a de la sorte

$$\varphi = 180° - (V - v);$$

et par conséquent

$$r = \frac{A(e^2-1)}{1-e\cos(V-v)}.$$

La valeur de V est donnée par la condition que quand

$$r = r_0,$$

on ait

$$v = 0.$$

Ainsi

$$r_0 = \frac{A(e^2-1)}{1-e\cos V},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} V = \frac{\sin\theta_0\cos\theta_0}{a a r_0 - \sin^2\theta_0}.$$

En faisant, pour abréger,

$$C = \frac{e}{1-e\cos V} = \frac{a a r_0 - \sin^2\theta_0}{\sin^2\theta_0\cos V},$$

il viendra

$$r = \frac{r_0}{1 + C\cos V - C\cos(V-v)},$$

pour l'équation polaire de la trajectoire lumineuse, au moyen de laquelle on pourra déterminer le rayon vecteur et son inclinaison sur la verticale pour tous les points de la trajectoire.

Afin d'avoir la réfraction astronomique qui correspond à une distance zénithale donnée, il faut d'abord tirer de cette équation l'angle au centre correspondant au rayon vecteur

$$r = r_0 + \frac{1}{a}$$

de la couche qui limite l'atmosphère; et il faut ensuite calculer l'angle v' formé par ce rayon vecteur avec le dernier élément de la trajectoire lumineuse, par la formule

$$\sin v' = \frac{r_0 \sin \theta_0}{r} \sqrt{1 + 4k\rho_0}.$$

Cela fait, il est facile de voir que la réfraction R sera donnée par l'expression

$$R = v + v' - \theta_0 \quad .$$

En appliquant ces formules à la détermination de la réfraction horizontale, on a

$$\theta = 90°,$$

$$\cos v = 1 - \frac{1}{(1 - a a r_0)(1 + a r_0)},$$

$$\sin v' = \frac{a r_0}{1 + a r_0} \sqrt{1 + 4k\rho_0}.$$

Si l'on prend

$$r_0 = 20\,888\,782 \text{ pieds},$$

$$a = 0{,}000\,022\,76,$$

$$4k\rho_0 = 0{,}000\,588\,56,$$

il vient

$$v = 4° 0' 12'',$$

$$v' = 86° 33' 25'',$$

et, par suite,

$$R = 33' 37'',$$

valeur très-satisfaisante.

On entend souvent répéter que la supposition d'un décroissement uniforme de densité donne une réfraction trop petite. Mais il importe de remarquer que cela n'a lieu que lorsqu'on fait décroître trop lentement la densité. Tous les ouvrages qui traitent de la réfraction astronomique, dans la supposition d'un décroissement uniforme de densité, prennent la hauteur de l'atmosphère double de celle de l'atmosphère homogène. Or, quoique cette hauteur remplisse la condition que la pression et la densité s'annullent ensemble à la limite supérieure de l'atmosphère, néanmoins elle ne correspond pas au décroissement réel observé dans les couches inférieures. La considération des couches les plus élevées de l'atmosphère, lesquelles n'ont aucun effet sensible sur la réfraction, est de peu d'importance pour le cas présent. Ce dont on a besoin, c'est la proportion du décroissement de la densité dans la portion inférieure de l'atmosphère ; et l'expérience nous montre qu'elle est plus forte que celle qui résulte d'une atmosphère de hauteur double de l'atmosphère homogène.

De l'expression précédente du rayon vecteur on tire l'expression

$$\frac{r_0}{r}(r - r_0) = x = 2 r_0 C \sin \frac{v}{2} \sin\left(V - \frac{v}{2}\right),$$

laquelle, jointe à l'expression

$$r - r_0 = x + \frac{x^2}{r_0 - x},$$

donnera la différence de niveau de deux stations, lorsque la distance zénithale θ_0 à l'une de ces stations, et l'angle v au centre de la terre, entre les deux rayons vecteurs menés aux deux stations, seront connus.

Ayant ainsi déterminé le rayon r, on trouvera facilement la différence entre la distance zénithale apparente θ_0 et la véritable, ou la réfraction terrestre δ, au moyen de la résolution du triangle formé par les rayons r_0, r et la corde rectiligne. Ce triangle donne

$$r_0 \sin(\theta_0 + \delta) = r \sin(\theta_0 + \delta - v),$$

d'où l'on tire

$$\cot(\theta_0 + \delta) = \frac{x}{r_0 \sin v} - \operatorname{tang} \frac{v}{2}.$$

Biot est arrivé aux mêmes formules par une autre voie, dans son *Mémoire sur la mesure théorique et expérimentale de la réfraction terrestre* (*). Nous renvoyons le lecteur à ce Mémoire qui contient de plus les formules pour une loi de densité exprimée par la première et la seconde puissance de la hauteur. Les trois Mémoires que ce savant a publiés dans la *Connaissance des Temps* (**) sont ce qui

(*) *Connaissance des Temps pour l'an 1842.*
(**) Pour 1839, 1841 et 1842.

a paru jusqu'ici de plus complet sur ce sujet. Mais les observations dont il s'est servi, qui résultent de la célèbre ascension aérostatique de GAY-LUSSAC, sont en opposition avec les plus récentes expériences. En effet, ce dernier a été conduit à la conclusion que la température varie moins, pour un changement déterminé de hauteur, près de la terre que dans les régions élevées. Après les expériences de M. GLAISHER cette opinion n'est plus soutenable.

Pour ce qui concerne la détermination des constantes α et a, nous ferons les remarques suivantes. Puisque l'état de l'atmosphère, surtout dans les couches inférieures, change continuellement, il faut, dans chaque cas particulier, déterminer les coefficients α et a au moyen d'observations météorologiques directes, faites au moment même où l'on a besoin de la réfraction. La valeur de α sera donnée par le baromètre et le thermomètre observés à la station inférieure. La valeur de a dépendra de ces données et, en outre, de la densité de l'air en un point assez élevé dans l'atmosphère.

Si l'on suppose que les densités ρ_0, ρ de l'air, à deux stations situées à des hauteurs différentes, ont été déterminées à l'aide d'observations météorologiques simultanées, la valeur de a sera donnée par la formule

$$a = \frac{g_0}{2\rho_0}\left(\frac{\rho_0^2 - \rho^2}{p_0 - p}\right),$$

qu'on tire de la formule barométrique trouvée plus haut.

Les densités ρ_0, ρ devront être calculées au moyen des pressions totales p_0, p, comme si l'air était sec, parce que l'air humide réfracte sensiblement la lumière comme l'air

sec de même température et sous la même pression. On devra, par conséquent, prendre

$$a = \frac{g_0}{2ct_0}\left[\frac{1-\left(\frac{pt_0}{p_0 t}\right)^2}{1-\frac{p}{p_0}}\right].$$

Il est bon de remarquer que la méthode reçue pour calculer les réfractions terrestres suppose implicitement un décroissement de densité qui s'accorde assez bien avec le résultat des observations de M. GLAISHER.

En effet, on admet en Géodésie, que la réfraction est proportionnelle à l'angle au centre de la terre, ou, en d'autres termes, on suppose qu'on a

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = M v,$$

M étant une constante. $\Delta\theta$ désigne l'angle formé par les deux tangentes aux extrémités de l'arc intercepté entre l'objet et l'œil de l'observateur, et est égal à la somme des angles que ces tangentes font avec la corde de l'arc. Comme la courbure de la trajectoire lumineuse varie très-peu dans une petite étendue, on considère ces deux angles comme étant égaux; de manière que

$$\frac{\Delta\theta}{2}$$

sera la réfraction à chaque station. La valeur de la réfraction terrestre est donc à peu-près

$$\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{M}{2} v.$$

On adopte généralement la valeur

$$M = \frac{1}{6}.$$

Voyons maintenant quelle est la loi de décroissement de la densité de l'air que présuppose cette manière d'opérer.

On a, pour l'élément $d\theta$ de la réfraction totale, (*)

$$d\theta = -\frac{2k\left(\frac{d\rho}{dr}\right)}{1+4k\rho} r\,dv.$$

Il faut donc qu'on ait

$$-2k\frac{\left(\frac{d\rho}{dr}\right)r}{1+4k\rho} = M,$$

ou bien

$$-\frac{2k\,d\rho}{1+4k\rho} = M\frac{dr}{r}.$$

En intégrant depuis ρ_0 et r_0 jusqu'à ρ et r, il vient

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+4k\rho}{1+4k\rho_0}\right) = M\log\left(\frac{r_0}{r}\right),$$

ou

$$\frac{1+4k\rho}{1+4k\rho_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2M},$$

qui exprime la relation existant entre la densité de l'air et l'altitude qu'implique la méthode employée pour le calcul des réfractions terrestres.

(*) Voyez LAPLACE, *Mécanique céleste*, vol. IV, p. 277.

En faisant, comme auparavant,

$$\alpha = \frac{2k\rho_0}{1+4k\rho_0}$$

on en tire

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2M}\right].$$

En mettant pour $\frac{r_0}{r}$ sa valeur

$$\frac{r_0}{r} = 1 - \frac{x}{r_0},$$

et en développant, il vient

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{M}{\alpha}\cdot\frac{x}{r_0},$$

si l'on néglige les puissances supérieures de $\frac{x}{r_0}$, comme fort petites.

Si l'on prend

$\alpha = 0{,}00029$ (à la température de la glace fondante et sous la pression de $0^m{,}76$)

$r_0 = 20\,888\,780$ pieds,

$$M = \frac{1}{6},$$

il vient

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - (0{,}0000275)\,x.$$

Au lieu du coefficient 0,0000275, nous avions trouvé

0,000 022 76.

Le coefficient de la réfraction terrestre qui correspond à la dernière valeur de a est

$$\frac{M}{2} = 0{,}0689, \quad \text{ou environ} \quad \frac{M}{2} = \frac{1}{14{,}5} \text{ (*)}.$$

On suppose ordinairement, dans les opérations géodésiques, que le coefficient

$$\frac{M}{2}$$

de la réfraction terrestre a toujours la même valeur, quels que soient le temps et le lieu. Il est clair que cela ne saurait être (**). Nous pensons qu'il est préférable de le déterminer par l'observation du décroissement actuel dans chaque cas particulier. On peut, à l'aide d'observations météorologiques directes, avoir les densités à deux stations situées à des niveaux différents, et, par suite, déterminer a par la formule citée plus haut

$$a = \frac{g_0}{2\rho_0}\left(\frac{\rho_0^2 - \rho^2}{p_0 - p}\right).$$

(*) Voici les coefficients de la réfraction obtenus par l'expérience :

Bessel, déduit de ses opérations en Prusse	0.0685
Gauss, déduit de ses observations	0.0653
Corabœuf	0.0642
Struve	0.0618
Moyenne déduite de la triangulation en France	0.0665
Moyenne déduite de la triangulation en Angleterre, pour des rayons traversant la mer,	0,0809
Moyenne déduite de la triangulation en Angleterre, pour des rayons ne traversant pas la mer.	0,0750

(*Ordnance Survey*, London, 1858, pp. 512, 550).

(**) On a trouvé que la valeur de la réfraction terrestre est sujette à une variation horaire. Une série d'observations a été faite à Angoulême par M. Hossard, pendant les mois de mai et de juin de 1844. Les observations étaient faites chaque demi-heure, depuis le matin jusqu'au soir ; et la mire observée était à la distance de treize milles. On en déduisit les conclusions suivantes : — La réfraction est la plus grande vers la pointe du jour ; depuis 5 ou 6 heures du matin jusqu'à 8 heures du matin, elle diminue rapidement ; de 8 à 10 la diminution est lente ; de 10 du matin à 4 du soir, la réfraction est presque constante ; depuis 4 du soir, la réfraction commence à croître.

Alors, on aura, pour le coefficient de la réfraction,

$$\frac{M}{2} = \frac{a a r_0}{2}.$$

Il ne faudra pas oublier que les densités ρ_0 et ρ doivent être calculées, comme si l'air était sec.

Nous terminerons ce mémoire en récapitulant les formules à employer pour la mesure des hauteurs, et en les appliquant à un exemple numérique.

FORMULE BAROMÉTRIQUE.

$$x = \frac{2}{g_0}\left(\frac{p_0 - p}{\rho_0 + \rho}\right),$$

$$\rho = \frac{p - \frac{3}{8}\varpi}{ct},$$

$c = (29{,}172)\, G$ en mesures métriques,

$c = (53{,}173)\, G$ en mesures anglaises,

$$x = \frac{r_0 (r - r_0)}{r},$$

p_0, p pressions atmosphériques à la station inférieure et à la supérieure,

ρ_0, ρ densités de l'air mêlé avec la vapeur aqueuse aux mêmes stations,

ϖ_0, ϖ pressions de la vapeur contenue dans l'atmosphère aux mêmes stations,

t_0, t températures absolues aux mêmes stations, le zéro absolu étant 274° C. ou 493,2 F. au-dessous de la glace fondante,

g_0 pesanteur à la station inférieure. A la latitude de 45° et au niveau de la mer $G = 9^m,80604 = 32^p,172$ (BESSEL),

r_0, r distances des stations au centre de la terre.

EXEMPLE.

Mesure de la hauteur du mont Viso, le 12 août 1863, à 2^h30^m après midi, en prenant Verzuolo (425^m) pour station inférieure.

Baromètre ramené à la température	Verzuolo	Mont Viso
de la glace fondante	$0,^m7239$	$0^m,4836$
Thermomètre libre	27°,15 C.	6° C.
Thermomètre à boule mouillée . .	21,3	6 (*).

On trouve, par conséquent,

$$p_0 = 0^m,7239, \quad p = 0^m,4836,$$
$$t_0 = 301°,15, \quad t = 280°,$$
$$\varpi_0 = 0^m,01528, \quad \varpi = 0^m,007.$$

Mont Viso au-dessus de Verzuolo .	$x = 3417,3$ mètres
Verzuolo au-dessus de la mer	425,0
Mont Viso au-dessus de la mer	3842,3.

(*) La température du thermomètre mouillé n'a pas été observée au sommet du mont Viso; mais, comme nous étions dans le brouillard, la différence entre le thermomètre sec et le mouillé devait être insensible.

Si l'on a égard à la diminution de la pesanteur à mesure qu'on s'éloigne du centre de la terre, la différence de niveau entre le mont Viso et Verzuolo devient de 3426,7 mètres, et l'altitude de ce pic au-dessus de la mer de 3851,7 mètres.

Les Tables de DELCROS fondées sur la formule de LAPLACE donnent 3860,7 mètres. Il importe de remarquer que si ce résultat ne dépasse que de 9 mètres la hauteur déduite de notre formule, cela tient à l'emploi fait dans ces tables du coefficient 18336 au lieu de 18405 qui résulte de la détermination plus précise des poids relatifs de l'air et du mercure faite par M. REGNAULT, détermination dont il faudrait se servir, et qui porterait la différence à 22 mètres.

FORMULE GÉODÉSIQUE.

$$x = 2r_0\, C \sin\frac{v}{2} \sin\left(V - \frac{v}{2}\right),$$

$$r - r_0 = x + \frac{x^2}{r_0 - x},$$

où

$$\text{tang } V = \frac{\sin\theta_0 \cos\theta_0}{\alpha a r_0 - \sin^2\theta_0},$$

$$C = \frac{\alpha a r_0 - \sin^2\theta_0}{\sin^2\theta_0 \cos V},$$

$$\alpha = \frac{2k\rho_0}{1 + 4k\rho_0},$$

$$a = \frac{g_0}{2\rho_0}\left(\frac{\rho_0^2 - \rho^2}{p_0 - p}\right),$$

$$4k\rho_0 = 4k[\rho]\frac{274\, g_0 H}{(0{,}76)Gt},$$

$4\,k\,[\rho] = 0{,}00058856$ à 0° C., $0^m{,}76$, 45° (Biot)

θ_0 distance zénithale de la mire,

r_0, r distances des stations au centre de la terre,

v angle entre les rayons r, r_0,

$6\,366\,786^m = 20\,888\,782^p$ rayon de la terre à 45° (Arago).

Exemple.

Mesure du mont Viso au-dessus de Turin.

Distance zénithale du mont Viso vu de l'Observatoire astronomique de Turin	$\theta_0 = 87°\ 6'\ 15''$
Distance angulaire entre Turin et le mont Viso	$v = 0°\ 35'\ 18'',1$ (*)
Rayon terrestre à l'Observatoire de Turin	$r_0 = 6\,367\,062^m$
Hauteur du baromètre à 0° à Turin, au moment de la mesure	$H = 0^m{,}7376$
Température centigrade de l'air . . .	7°

A défaut d'observations météorologiques, faites au même instant au sommet du mont Viso, nous déterminerons la constante a, c'est-à-dire la raison du décroissement de la densité de l'air, au moyen des observations météorologiques faites à Casteldelfino, au pied du mont Viso, à l'instant de la mesure. Ces observations ont donné:

Baromètre à 0°	$h = 0^m{,}6506$
Température de l'air	3°,5

(*) Cette distance angulaire a été déduite des données suivantes:

Latitude de Turin	45° 4' 6'' N.
» du mont Viso	44° 39' 45'' N.
Azimut de Turin-Mont Viso, compté du S. à l'O.	46° 36' 0'',7.

Avec ces diverses données, on obtient

$$\begin{aligned} 4\,k\,\rho_0 &= 0{,}00055695 \\ \alpha &= 0{,}00027832 \\ a &= 0{,}00010459 \\ \alpha\,a\,r_0 &= 0{,}18534 \\ V &= -\,3^\circ\,33'\,18'',6 \\ C &= -\,0{,}81576 \\ x &= 3580^{m},46. \end{aligned}$$

Ainsi, l'on trouve

Mont Viso au-dessus de Turin $r - r_0 = 3582{,}5$ mètres.
Altitude de Turin 276,0
Mont Viso au-dessus de la mer 3858,5

SUR

LA MESURE DES HAUTEURS

A L'AIDE DU BAROMÈTRE.

SUR

LA MESURE DES HAUTEURS

A L'AIDE DU BAROMÈTRE.

(Les Mondes, Revue hebdomadaire, par M. l'abbé Moigno, t. 6, Paris 1864).

Jusqu'ici on a été disposé à croire que la quantité dont il faut s'élever dans l'atmosphère, pour obtenir un abaissement d'un degré dans la température, va en diminuant à mesure qu'on s'éloigne de la surface terrestre, ou, ce qui revient au même, que le décroissement de la température dans l'atmosphère s'accélère à mesure qu'on s'élève. Tel est le résultat que Gay-Lussac a déduit des observations faites dans son ascension aérostatique. Poisson est parvenu à ce même résultat par des considérations purement théoriques, fondées sur les lois de la propagation de la chaleur de proche en proche par communication directe dans chaque colonne verticale d'air, en faisant abstraction du rayonnement réciproque des particules aériennes et de l'absorption de chaleur qu'elles peuvent exercer. Biot dans ses nombreux ouvrages qui traitent de cette question, admet ce même résultat comme prouvé par l'expérience ainsi que par les théories physiques.

La formule de Laplace, pour la mesure des hauteurs

par le baromètre, suppose implicitement que le décroissement de température devient de plus en plus rapide à mesure qu'on s'élève. C'est une erreur de croire que la formule de LAPLACE repose sur l'hypothèse d'un décroissement de température uniforme. Il est facile de faire voir que cette formule entraîne à une loi de décroissement de la chaleur telle, que le lieu géométrique des hauteurs et des températures est une parabole de second degré, dont l'axe est parallèle aux hauteurs, ou, en d'autres termes, qu'elle présuppose un égal abaissement de température pour des changements de hauteur décroissant en progression arithmétique (*).

La table des réfractions astronomiques établie par BESSEL, dans ses *Fundamenta Astronomiæ*, est fondée aussi sur une loi de décroissement de la densité de l'air qui entraîne à un décroissement accéléré des températures.

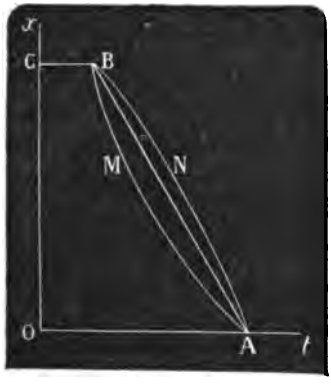
Mais voici que les observations de M. GLAISHER, faites dans ses nombreuses ascensions aérostatiques, viennent renverser tout cela. Aujourd'hui il a été mis hors de doute par ce hardi savant que le décroissement de la température, pour un même intervalle de hauteur, devient plus lent à mesure qu'on s'éloigne de la surface terrestre. Si, par exemple, le thermomètre baisse de 7°,2 F. (4° C.), en s'élevant de la surface de la terre jusqu'à la hauteur de 1000 pieds anglais (305 mètres), le thermomètre ne baisse plus que de 5°,3 F. (2°,94 C.), en montant de 1000 pieds à 2000, et ainsi de suite. De 14000 à 15000 pieds il baisse de 2°,1 F. (1°,11 C.); de 28000 à 29000, il baisse de 0°,8 F. (0°,44 C.) (**).

(*) Voyez l'*Addition* de la page 160.

(**) *An account of Meteorological and Physical Observations in eight Balloon-Ascents, made at the request of the Committee.* By James GLAISHER, F. R. S. London, 1863. (From the *Report of the British Association for the advancement of Science* for 1862).

Il devient dès lors nécessaire de voir quelles sont les modifications à introduire dans la formule du baromètre, ainsi que dans le calcul de la réfraction atmosphérique, pour avoir égard à la constitution réelle de l'atmosphère telle qu'elle a été trouvée par M. GLAISHER. C'est ce que j'ai tâché de faire dans deux articles publiés dans le *Philosophical Magazine* (*). Pour le moment je ne m'occuperai que de la formule barométrique, qui présente un intérêt plus général.

On peut démontrer d'abord que la formule de LAPLACE, et en général toute formule basée sur un décroissement de température qui va en s'accélérant, doit donner des hauteurs trop fortes.



Si nous portons sur un axe horizontal Ot les températures, et sur un axe vertical Ox les hauteurs, une courbe telle que AMB représentera la loi qui lie la température à la hauteur. Lorsque le décroissement est accéléré, comme on l'a cru jusqu'à présent, la courbe tournera sa concavité vers le bas, tandis que lorsque le décroissement est retardé, comme l'a trouvé M. GLAISHER, la courbe tournera sa convexité vers le bas.

Supposons maintenant qu'on ait observé la température en deux points de niveau différent. Soit OC la différence de niveau, et soient OA, CB les deux températures, il est

(*) *The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. Fourth Series, vol. 27 — February, June 1864.

évident qu'à toutes les hauteurs comprises entre 0 et C la température sera plus grande pour une courbe concave ANB que pour une courbe convexe AMB, c'est-à-dire que la température sera plus grande pour une loi de décroissement accéléré que pour une loi de décroissement retardé.

Cela posé, voyons comment on déduit la hauteur d'un lieu par le moyen de l'observation du baromètre.

Le poids de la colonne d'air comprise entre deux stations est évidemment égal à la différence des deux pressions accusées par le baromètre aux mêmes stations. D'un autre côté, le poids de la colonne d'air est égal à la surface de sa base, que nous supposerons égale à l'unité, multipliée par la hauteur et par une moyenne entre les diverses valeurs que le poids spécifique de l'air acquiert dans toute l'étendue de la colonne. Il en résulte que la hauteur d'un lieu au-dessus d'un autre est égale à la différence des pressions indiquées par les baromètres, observés simultanément dans les deux lieux, divisée par une moyenne entre les divers poids spécifiques de l'air compris entre les deux stations.

Nous avons fait voir ci-dessus que les températures de l'air sont plus grandes, dans toute l'étendue de la colonne, pour un décroissement accéléré que pour un décroissement retardé. Or, comme le poids spécifique de l'air est d'autant plus petit que la température est plus élevée, il en résulte que la moyenne des poids spécifiques de l'air est plus petite dans le premier cas que dans le second. Donc, on obtient une hauteur plus grande dans le premier cas que dans le second (*).

(*) On pourrait objecter à ce raisonnement que le poids spécifique est d'autant plus petit que la température est plus grande seulement lorsque la pression est égale de part et d'autre, et qu'il pourrait se faire que la pression fût plus grande dans la courbe concave que dans la convexe, pour une même hauteur, de manière à compenser la plus grande température.

Deux lignes de calcul infinitésimal éclairciront complètement ce qu'il m'a été

De là il résulte que la formule de LAPLACE doit donner des hauteurs trop fortes.

Cependant comment se fait-il que les hauteurs d'un très-grand nombre de montagnes, déterminées par cette formule, s'accordent avec les mêmes hauteurs mesurées géométriquement?

Voici l'explication de ce fait. Le coefficient constant qui entre dans cette formule dépend du rapport du poids du mercure à celui de l'air. Ce rapport a été trouvé par BIOT et ARAGO égal à 10467, à 0° et 0^{m},76, ce qui donne 18317, pour le coefficient de la formule. Cependant il a été porté

---

très-difficile d'expliquer sans ce secours. Soit x la hauteur, p la pression de l'air, ρ sa densité, g la gravité. L'équation d'équilibre d'une colonne d'air est

$$dp = -g\rho dx.$$

On a, d'ailleurs

$$p = c\rho t,$$

t étant la température absolue de l'air (mesurée au-dessus de — 274° C.); c un coefficient constant. En éliminant ρ, il vient

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{c}\cdot\frac{dx}{t};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\log\frac{p_0}{p} = \frac{g}{c}\int_0^x \frac{dx}{t}.$$

Si l'on pose

$$M = \frac{\int_0^x \frac{dx}{t}}{x},$$

M représentera la moyenne arithmétique entre les diverses valeurs que $\frac{1}{t}$ prend entre les deux limites de l'intégration, et l'on aura

$$x = \frac{c}{g}\,\frac{\log\frac{p_0}{p}}{M}.$$

Or, M sera plus petit pour la courbe concave que pour la courbe convexe: donc x sera plus grand pour la courbe concave que pour la courbe convexe.

par RAMOND à 18336 pour faire accorder les résultats de la formule avec les mesures trigonométriques. Or, des expériences plus modernes de M. REGNAULT ont donné 10517,3, pour le rapport du poids du mercure à celui de l'air, à 45° de latitude et au niveau de la mer ; d'où l'on déduit le coefficient 18405. De sorte que le coefficient de RAMOND, qu'on emploie généralement, est trop faible de $\frac{1}{266}$.

Si l'on employait, comme on le devrait, le coefficient 18405, qui résulte des expériences les plus récentes sur les pesanteurs spécifiques du mercure et de l'air, on trouverait des hauteurs trop grandes. En employant un coefficient moindre, il y a une hauteur pour laquelle la formule donne un résultat exact; mais, au delà, elle donne des résultats trop forts, et en deçà trop faibles. Cependant les différences en deçà seront assez faibles pour disparaître au milieu des erreurs inévitables dans toute mesure. C'est aux grandes hauteurs qu'on commence à s'apercevoir du défaut de la formule. Ayant calculé par la méthode des quadratures, indépendamment de toute hypothèse, les hauteurs successives auxquelles M. GLAISHER s'est élevé, j'ai trouvé les résultats suivants :

HAUTEURS VRAIES	HAUTEURS CALCULÉES PAR LA FORMULE DE LAPLACE	DIFFÉRENCES
pieds anglais	pieds anglais	pieds anglais
1002	1000	— 2
2001	2000	— 1
3000	3000	0
3995	4000	+ 5
4988	5000	+ 12
9950	10000	+ 50
14905	15000	+ 95
19817	20000	+183
24688	25000	+312
29518	30000	+482

Il existe une autre formule barométrique, moins connue que celle de LAPLACE; elle est fondée sur un décroissement uniforme de la température dans l'atmosphère. LAGRANGE l'a donnée dans son *Mémoire sur les réfractions astronomiques* (*). On la trouve aussi dans la *Météorologie* de sir JOHN HERSCHEL (**). Elle a été reproduite dernièrement par M. BABINET (***).

La relation qui existe entre la hauteur et la température est alors représentée par une ligne droite AB. D'après ce que nous avons dit ci-dessus, il est clair que la formule basée sur cette loi de décroissement doit donner des hauteurs moindres que la formule de LAPLACE, mais néanmoins encore trop fortes.

En développant le logarithme contenu dans la formule de LAPLACE, et en négligeant les puissances supérieures à la première, on tombe sur une formule approximative qui a été proposée par M. BABINET (****) pour la mesure des hauteurs qui ne dépassent pas 1000 ou 1200 mètres. Cette formule barométrique pèche dans le sens contraire de celle de LAPLACE; c'est-à-dire qu'elle donne des hauteurs trop faibles (*****). Si l'on calcule avec son aide la hauteur que,

---

(*) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1772.

(**) *Meteorology*, from the *Encyclopædia Britannica*. Edinburgh, 1861, page 26.

(***) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. 1861, 2d semestre.

(****) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. 1861, 1er semestre. — Cette formule avait été déjà donnée par sir George SHUCKBURGH et démontrée par LESLIE et par ROBISON. — Voyez: GOVI, *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino*, serie II, t. XXIII, p. 470.

(*****) La formule dite de M. BABINET conduit à une relation assez compliquée entre la température et la hauteur, ou entre la densité de l'air et la hauteur. M. CUENOUD, de Lausanne, dans les *Nouvelles Annales de mathématiques de Terquem*, tome XX, 1861, croit que la formule de M. BABINET peut se déduire d'un décroissement de la densité de l'air en progression arithmétique. Mais, pour cela, il est nécessaire de supposer la température constante dans toute la colonne d'air, ce qui n'est point permis, car toutes les fois qu'une formule barométrique est donnée, la relation existant entre les hauteurs et les températures, ainsi que celle entre les hauteurs et les densités,

dans les résultats de M. GLAISHER, la formule de LAPLACE porte à 10000 pieds anglais, on trouve seulement 9601 pieds, tandis qu'en réalité cette hauteur est de 9950 pieds.

La conclusion à tirer de tout cela, c'est qu'aucune des formules barométriques généralement employées ne satisfait aux résultats obtenus par M. GLAISHER dans ses voyages aériens. Il nous reste à chercher une formule qui les représente mieux.

J'ai fait voir ci-dessus que la différence de niveau entre deux baromètres est égale à la différence des pressions indiquées par eux, divisée par une moyenne entre les diverses valeurs qu'acquiert la densité de l'air dans toute l'étendue de la colonne d'air comprise entre les deux baromètres. La valeur de cette moyenne dépend de la manière dont la densité varie suivant la hauteur; et on ne peut la déterminer sans connaître la loi de décroissement de la densité, ou bien la loi de décroissement de la température, car une de ces lois étant donnée, l'autre s'en déduit par l'analyse mathématique.

L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire relativement à ce décroissement est celle où l'on suppose que la densité décroît en progression arithmétique. Les résultats de M. GLAISHER tendent à confirmer cette hypothèse. Ayant calculé les densités des couches successives de l'atmosphère, qui se déduisent de ces résultats, en partant de la surface terrestre jusqu'à 30000 pieds (9144 mètres) de

---

est implicitement comprise dans la formule même. Il ne s'agit que de l'en dégager, ce qui est l'affaire du calcul infinitésimal. Il arrive, dans ce cas, comme pour la formule de LAPLACE, que des personnes croient fondée sur un décroissement de chaleur en progression arithmétique, mais qui en réalité entraîne à une tout autre loi, comme LAGRANGE l'a fait voir le premier dans son *Mémoire sur les réfractions astronomiques* (*).

(*) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1772, page 265.

hauteur, j'ai trouvé qu'elles décroissent à peu près en progression arithmétique quand les hauteurs suivent une progression semblable.

Cette loi de décroissement des densités étant admise, il s'ensuit sur-le-champ que la moyenne entre toutes les densités correspondantes aux différents points de la colonne atmosphérique comprise entre les deux stations est égale à la demi-somme des deux densités extrêmes. De sorte que la différence de niveau x, entre deux stations, est exprimée par la formule très-simple

$$x = \frac{2}{g_0}\left(\frac{p_0 - p}{\rho_0 + \rho}\right),$$

où p_0, p désignent les pressions de l'air à la station inférieure et à la station supérieure, ρ_0, ρ les densités de l'air aux mêmes stations, g_0 la pesanteur à la station inférieure.

Les densités ρ_0, ρ seront données par les indications réunies du baromètre, du thermomètre et de de l'hygromètre aux deux stations. On les en déduira par la formule connue

$$\rho = \frac{p - m\varpi}{ct},$$

où ϖ exprime la pression de la vapeur aqueuse contenue dans l'air, et qui sera donnée par l'hygromètre ; $1 - m$ désigne le rapport entre le poids de la vapeur et de l'air sec, à pression et à température égales (suivant GAY-LUSSAC: $m = \frac{3}{8}$); t, la température absolue de l'air comptée à partir de zéro absolu (— 274° C.); c, un coefficient constant dont la valeur est, suivant les données les plus récentes,

$$c = (29{,}172)\, G,$$

G étant la gravité à 45° de latitude, au niveau de la mer ($G = 9^{m},80604$ d'après BESSEL).

Au lieu de p_0 et p, on pourra substituer les longueurs h_0 et h des colonnes barométriques, après les avoir ramenées toutes deux à une même température et à une même pesanteur.

Dans les circonstances ordinaires de la pratique, lorsque la hauteur à mesurer n'est pas considérable, et qu'on n'exige pas une très-grande précision, on pourra envelopper la correction relative au décroissement de la pesanteur et à l'état hygrométrique de l'air dans le coefficient constant et employer la formule

$$x = A \frac{h_0 - h}{\frac{h_0}{t_0} + \frac{h}{t}},$$

où h_0, h expriment les hauteurs, réduites à zéro, du baromètre aux deux stations. (Pour ramener le baromètre à 0°, il faut déduire 0,00016 pour chaque degré lorsque l'échelle est en laiton, et 0,00018, lorsque l'échelle est en bois ou que le baromètre est divisé sur verre). On a

$$t_0 = 274 + \theta_0,$$
$$t = 274 + \theta,$$

θ_0 et θ étant les températures indiquées par le thermomètre centigrade, et

$$A = 58{,}8.$$

Cette formule est fort simple, n'exige point l'emploi des logarithmes, et se grave sur-le-champ dans la mémoire.

Toute méthode pour déterminer la différence de niveau de deux stations par les seules indications du baromètre, du

thermomètre et de l'hygromètre à ces stations, est sujette à deux causes d'erreur.

La première réside dans l'incertitude où nous sommes sur la manière dont la densité de l'air varie d'une station à l'autre. En supposant même qu'on fût bien fixé sur la loi suivant laquelle la densité varie avec la hauteur, on ne pourrait cependant admettre cette loi que comme convenant à l'état moyen de l'atmosphère, état autour duquel la constitution de l'atmosphère doit continuellement osciller. En effet, le décroissement des températures, et, partant, des densités dans l'atmosphère réelle, est influencé par une foule de causes accidentelles ou locales, qui l'écartent généralement de la régularité qu'offrirait une formule mathématique. Il se produit même quelquefois une inversion dans la loi du décroissement des densités, comme on en a un exemple dans le cas où le phénomène du mirage a lieu.

Le seul parti qu'on pourrait prendre pour tenir compte de l'état réel de l'atmosphère au moment de la mesure de la hauteur, ce serait de déterminer la densité de l'air dans un nombre suffisamment grand de points de la colonne aérienne. C'est ce que j'ai fait pour calculer les hauteurs au moyen des résultats de M. Glaisher. Mais ces observations multipliées, si elles sont possibles dans une ascension aérostatique, où l'on traverse rapidement les couches successives de l'atmosphère, ne seraient guère praticables dans la mesure de la hauteur d'une montagne, car elles doivent être faites toutes au même instant.

La seconde cause d'erreur consiste dans l'incertitude qui reste toujours par rapport à la température propre de l'air, quand on la déduit des indications du thermomètre, à cause de l'échange de chaleur rayonnante entre celui-ci et les corps environnants. Il est fort à regretter qu'on

ne possède aucun instrument capable de donner la température réelle de l'air, ou, au moins, qu'on ne connaisse pas les corrections à appliquer aux indications du thermomètre dans les conditions d'exposition où il se trouve, pour en conclure la température des particules gazeuses dont il est environné. L'Académie des sciences de Paris mit au concours, pour 1856, la question des corrections à faire subir dans ce cas au thermomètre; mais personne ne l'ayant résolue, elle fut retirée en 1858.

Je pense qu'on pourrait, par un moyen indirect, éviter les erreurs que les deux causes ci-dessus mentionnées laissent peser sur les appréciations des hauteurs par le baromètre.

Tout le monde sait que la vitesse du son dans l'air dépend de la densité de celui-ci, et que cette vitesse peut être déterminée en déchargeant une arme à feu et en mesurant le temps qui s'écoule entre le moment où l'on aperçoit la lumière de l'explosion et celui où l'on entend le bruit. En divisant l'espace parcouru par le nombre de secondes observé, on obtient la vitesse du son. Si la densité de l'air varie entre les deux stations, la vitesse qu'on obtient sera évidemment une moyenne arithmétique entre toutes les valeurs que la vitesse du son prend entre les deux stations.

Nous avons donc ici un moyen pratique pour obtenir une moyenne qui va nous servir à nous affranchir de la connaissance de la loi de décroissement de la densité, ainsi que de la température de l'air.

La première formule barométrique ci-dessus mentionnée donne, pour une hauteur infiniment petite, en faisant usage de l'algorithme du calcul différentiel,

$$dx = -\frac{1}{g} \cdot \frac{dp}{\rho}.$$

Or on trouve, dans tous les traités de physique mathématique, qu'en désignant par k le rapport des chaleurs spécifiques de l'air à pression et à volume constants, on a, pour la vitesse du son,

$$v = \sqrt{\frac{kp}{\rho}};$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{kp}{v^2}.$$

En substituant cette valeur dans la première équation, il vient

$$\frac{dx}{v^2} = -\frac{1}{gk}\frac{dp}{p};$$

et en intégrant de manière qu'on ait en même temps $x = 0$, $p = p_0$, on trouve

$$\int_0^x \frac{dx}{v^2} = \frac{1}{gk}\log\frac{p_0}{p},$$

le logarithme étant hyperbolique.

Si l'on avait la valeur de v en fonction de x, on effectuerait l'intégration du premier membre, et l'on en retirerait la valeur de x.

A défaut de l'expression analytique de v en fonction de x, nous ferons observer que l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{v^2}$$

est égale à l'intervalle x multiplié par la moyenne arithmétique des diverses valeurs que $\frac{1}{v^2}$ acquiert entre les deux limites de l'intégration. Or nous pouvons obtenir la

moyenne arithmétique des valeurs de v entre ces limites par l'observation. A cet effet, il suffit de mesurer le temps que le son emploie pour parvenir d'une station à l'autre.

La distance des deux stations est égale à

$$\frac{x}{\cos\varphi},$$

en désignant par φ l'angle que fait avec la verticale la ligne droite qui réunit les deux stations. Si l'on exprime par τ le temps employé par le son à parcourir la distance qui sépare les deux stations, on aura, pour la vitesse moyenne du son entre ces stations,

$$\frac{x}{\tau\cos\varphi}.$$

Nous pourrons, avec une très-grande approximation, substituer à la moyenne des valeurs de $\frac{1}{v^2}$ la valeur

$$\frac{\tau^2\cos^2\varphi}{x^2}.$$

On aura donc

$$x\frac{\tau^2\cos^2\varphi}{x^2} = \frac{1}{gk}\log\frac{p_0}{p},$$

d'où l'on tire

$$x = gk\frac{\tau^2\cos^2\varphi}{\log\frac{p_0}{p}}.$$

Ainsi, nous pourrons déterminer la différence de deux stations au moyen des deux hauteurs barométriques, du temps employé par le son à parvenir d'une station à l'autre, et de l'angle avec la verticale de la droite qui réunit les deux stations.

Pour s'affranchir de l'influence du vent, dont la vitesse

s'ajoute à celle du son, ou s'en retranche, suivant que le bruit et le vent marchent dans le même sens ou dans un sens opposé, il sera bon de décharger une arme à feu à chaque station, et de mesurer le temps qui s'écoule entre l'arrivée de la lumière et l'arrivée du bruit tant à une station qu'à l'autre. La moyenne entre les deux temps donnera le temps vrai que le son met à parvenir d'une station à l'autre.

L'angle φ doit être corrigé de la réfraction par les méthodes connues.

Pour mettre la formule ci-dessus en nombres, il suffit de faire

$$k = 1{,}41$$

$g = 9^{m},80604$ (à 45° de latitude et au niveau de la mer)

$$M = 0{,}43429 \text{ (module)}$$

$$kgM = 6{,}005.$$

On aura donc

$$x = 6{,}005 \frac{\tau^2 \cos^2 \varphi}{\log \frac{p_0}{p}},$$

les logarithmes étant vulgaires.

Je ne me dissimule pas que la mesure des hauteurs par cette méthode renferme en elle-même une difficulté résultant de la détermination du temps que le son met à parvenir d'une station à l'autre : en effet, on éprouve en pratique beaucoup de difficulté à fixer avec précision l'instant où l'on aperçoit la lumière et celui où le son arrive à l'oreille de l'observateur.

Une erreur d'un cinquième de seconde, dans l'appréciation du temps, produit une erreur relative sur la hauteur de

$$\frac{0'',4}{\tau}.$$

Or, il est difficile qu'on puisse, en pratique, obtenir une précision plus grande qu'un cinquième de seconde.

Une erreur d'un dixième de degré, dans la mesure de l'angle φ, produit une erreur relative de

$$-0{,}0035 \operatorname{tang} \varphi$$

sur la hauteur. Certes, on pourra, en pratique, obtenir une précision beaucoup plus grande, même avec des instruments grossiers.

On voit d'après cela, qu'en général il conviendra d'éloigner horizontalement les deux stations, de manière à augmenter la longueur du temps τ, sur la mesure duquel portent toutes les difficultés.

Je ferai remarquer, en finissant, que dans la méthode proposée pour la mesure des hauteurs à l'aide du baromètre et de la vitesse du son, il n'est point nécessaire d'avoir égard à l'état hygrométrique de l'air, car son influence est enveloppée dans la valeur du temps.

Une application de cette méthode à la mesure de la différence de niveau entre le village de Bioglio et le sommet de la Rovella dans le Biellais (Piémont) a donné les résultats suivants:

Bioglio (maison Cerruti)	$h_0 = 726^{mm},7$	$t_0 = 18°,6$ C.;
Rovella (sommet)	$h = 693,\ 3$	$t = 16,9$;

Temps mesuré avec un compteur donnant le cinquième

de seconde. Moyenne obtenue en tirant alternativement 20 coups de fusil à chacune des deux stations $\tau = 7'', 3$;

Angle mesuré avec un *Aba* (espèce de théodolite inventé par M. ANTOINE D'ABBADIE) donnant le centième de degré (division décimale) $\varphi = 89°,79$.

On en déduit $399^m,4$, pour la différence de niveau entre Bioglio et le sommet de la Rovella. La formule de LAPLACE, au moyen des deux températures, donne $401^m,3$

(*Addition de 1874*).

TABLE HYPSOMÉTRIQUE EXPÉDITIVE.

TABLE HYPSOMÉTRIQUE

POUR DÉTERMINER RAPIDEMENT SUR PLACE

LA DIFFÉRENCE DE NIVEAU DE DEUX STATIONS

et pour

RÉDUIRE LES INDICATIONS DU BAROMÈTRE

DANS UNE STATION

À CE QU'ELLES SERAIENT DANS UNE AUTRE.

(Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. II — dicembre 1866).

La détermination de la différence de niveau de deux stations, par le baromètre, exige la connaissance des indications simultanées du baromètre et du thermomètre aux deux stations.

Cependant il arrive fort souvent que, faute de deux baromètres, ou de deux observateurs, on ne peut avoir les deux observations barométriques et thermométriques simultanées. Venir en aide à l'observateur placé dans ces circonstances, tel est le but de cet écrit.

Quand une personne seule fait les observations, elle observe d'abord le baromètre à la station inférieure, ensuite à la supérieure, où elle prend aussi note de la température de l'air. A son retour à la station inférieure, elle observe de nouveau le baromètre. La moyenne des deux

hauteurs barométriques, observées à la station inférieure, donnera la hauteur du baromètre à cette station. Le même procédé ne peut être suivi pour la température, car les variations en sont trop fortes dans le cours de la journée, Si l'on est parti le matin et revenu le soir, la moyenne des indications du thermomètre donnerait évidemment une température inférieure à celle qui avait lieu lors de l'observation à la station supérieure.

Le problème qui se présente ici est le suivant:

Étant données la hauteur du baromètre et la température de l'air à une station, trouver la différence de niveau avec une autre station dont ne connaît que la hauteur du baromètre.

La différence de niveau sera l'*altitude* de la station supérieure, si l'on prend pour station inférieure le niveau de la mer, où l'on peut supposer, à défaut d'observation simultanée du baromètre, que la pression atmosphérique est de 760 millimètres.

Dans le problème qu'il s'agit de résoudre, il y a deux inconnues: la différence de niveau et la température de l'air à la station inférieure. Pour déterminer celle-ci, il faudra supposer que la loi, suivant laquelle la densité de l'air varie en raison de la hauteur, est connue.

Nous admettrons, ainsi que des observations récentes tendent à le prouver, que la densité de l'air décroît uniformément à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère.

Soit a la fraction dont la densité de l'air décroît pour chaque mètre d'élévation, on aura

$$\rho = \rho_0 (1 - ax),$$

ρ_0, ρ étant les deux densités de l'air en deux points séparés par la distance verticale x.

En désignant par h_0, t_0 la hauteur du baromètre et la température absolue (au-dessus de — 274° C.) de l'air à la station inférieure; par h, t les quantités analogues à la station supérieure, on aura

$$\rho_0 = \frac{h_0}{c t_0}, \qquad \rho = \frac{h}{c t},$$

c étant une constante.

En substituant, il vient

$$\frac{h}{t} = \frac{h_0}{t_0}(1 - a x).$$

D'autre part, la hauteur x est donnée par la formule barométrique

$$x = A \frac{h_0 - h}{\frac{h_0}{t_0} + \frac{h}{t}},$$

dans laquelle le coefficient

$$A = 58{,}8$$

comprend la correction relative au décroissement de la pesanteur dans la verticale, et à la présence de l'humidité dans l'air.

Nous avons ainsi deux équations contenant les deux inconnues x et t_0, desquelles on pourra dégager la valeur de x.

En éliminant t_0, on obtient

$$x = A \frac{t}{h} \left(\frac{1 - a x}{2 - a x} \right) (h_0 - h);$$

d'où l'on tire l'équation du second degré

$$x^2 - 2\left(\frac{1}{a} + z\right)x + \frac{2}{a}z = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$z = \frac{1}{2} A \frac{t}{k} (h_0 - h).$$

On remarquera que z est la hauteur d'une colonne d'air qui aurait partout la même densité qu'elle a à son extrémité supérieure, et qui ferait équilibre à la colonne mercurielle $h_0 - h$.

La racine de l'équation ci-dessus, qui résout la question, est

$$x = \frac{1}{a} + z - \sqrt{\frac{1}{a^2} + z^2},$$

ou bien

$$x = \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\cos\left(45 - \frac{1}{2}\varphi\right)},$$

en posant

$$az = \text{tang}\, \varphi.$$

A l'aide de ces formules, on peut déterminer la différence de niveau entre deux stations, lorsqu'on connaît la hauteur du baromètre et la température de l'air à une station, ainsi que la hauteur du baromètre à l'autre station; et lorsqu'on suppose en outre que l'on connaît la proportion suivant laquelle la densité de l'air décroît, en s'élevant dans l'atmosphère.

Quand il ne s'agit que de se rendre compte approximativement de la hauteur à laquelle on se trouve placé au-dessus de la mer, on prendra 760 millimètres pour la hauteur du baromètre à la station inférieure.

J'ai pensé qu'une table, calculée sur la formule précédente, pourrait être utile aux personnes qui s'occupent de nivellements barométriques.

M. Melchior Pulciano, ingénieur, à qui j'ai communiqué mon idée, a bien voulu calculer la table suivante. Je me fais un devoir de lui en témoigner ici toute ma reconnaissance.

Cette table donne immédiatement, sans calcul, à la simple lecture, l'altitude du lieu où l'on a observé la hauteur du baromètre et la température de l'air, en supposant que la hauteur du baromètre soit de 760 millimètres au niveau de la mer, et que le coefficient a de la proportion suivant laquelle la densité de l'air décroît, en s'élevant dans l'atmosphère, soit tel qu'on ait

$$a = 0,00008 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a} = 12500 .$$

C'est à peu près la valeur qui résulte de l'expérience.

Au moyen de cette table, on peut aussi déterminer la hauteur d'un lieu au-dessus d'un autre dont la hauteur du baromètre est donnée.

En effet, la valeur de z,

$$z = \frac{1}{2} A t \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right),$$

ne contenant que le rapport

$$\frac{h_0}{h}$$

des deux colonnes barométriques, le même nombre correspondra, dans la table, au rapport

$$\frac{760}{H},$$

et au rapport

$$\frac{h_0}{h},$$

quand on aura entre eux l'équation

$$\frac{760}{H} = \frac{h_0}{h}.$$

On tire de là

$$H = 760\ \frac{h}{h_0}.$$

On n'aura donc qu'à multiplier par 760 le rapport des hauteurs du baromètre aux deux stations pour obtenir l'argument avec lequel il faudra entrer dans la table. L'altitude qu'on trouvera en regard sera la différence de niveau des deux stations.

Si le baromètre anéroïde, dans son état actuel, n'est pas assez parfait pour pouvoir remplacer le baromètre mercuriel, il peut en être cependant un auxiliaire précieux, en permettant d'obtenir approximativement la hauteur d'un grand nombre de stations au-dessus ou au-dessous d'une station où le baromètre mercuriel a été observé.

Avec les tables barométriques ordinaires, on serait rebuté par la longueur des calculs à faire pour déterminer la hauteur de toutes ces stations où l'anéroïde a été observé ; tandis que notre table permettra de trouver toutes ces hauteurs avec la plus grande facilité.

En effet, soient $h_1, h_2, h_3, \ldots$ les hauteurs barométriques lues sur l'anéroïde, et h_0 la hauteur barométrique à la dernière observation faite avec le baromètre mercuriel. Afin d'avoir la hauteur des stations h_1, h_2, h_3, . . . au-dessus de la station h_0, il suffira de chercher dans notre table les altitudes correspondantes aux hauteurs barométriques

$$\frac{760}{h_0} h_1, \qquad \frac{760}{h_0} h_2, \qquad \frac{760}{h_0} h_3, \ldots\ldots$$

De la sorte il devient possible de multiplier les stations sans être entraîné à des calculs interminables.

Les personnes qui s'occupent de Géologie et de Géographie botanique apprécieront, je l'espère, cet avantage de notre table. Avec elle et un anéroïde qu'on porte dans sa poche, comme une montre, et qu'on peut observer à tout moment, on pourra fixer la hauteur de tout point remarquable, au-dessus d'une station où l'on a observé le baromètre mercuriel.

Si l'on se borne à des différences de niveau de quelques centaines de mètres, on n'aura pas à redouter de graves erreurs, résultant de l'imperfection de l'anéroïde, ou d'une loi de décroissement de la densité de l'air, différente de celle qu'on a supposée dans la table.

La même table se prête à résoudre un problème qui se présente souvent en Météorologie, savoir:

La hauteur du baromètre et la température d'un lieu étant données, réduire la hauteur du baromètre à ce qu'elle serait au niveau de la mer, ou, plus généralement, à une autre station dont la différence de niveau avec la première est connue.

La formule qu'on emploie communément à cet effet est

basée sur la supposition que la température est la même aux deux stations, ce qui ne peut être admis que pour des différences de niveau assez petites.

Pour résoudre ce problème avec notre table, il suffit d'y entrer avec la température donnée, et, en parcourant la colonne verticale jusqu'à ce qu'on arrive à une altitude égale à la différence de niveau donnée, lire la hauteur barométrique qui se trouve en regard dans la première colonne. Soit H cette hauteur barométrique, nous aurons

$$\frac{760}{H} = \frac{h_0}{h},$$

d'où l'on tire l'expression

$$h_0 = 760 \frac{h}{H},$$

pour déterminer la hauteur barométrique h_0 cherchée, qui correspond à la hauteur barométrique h réellement observée.

Pour faciliter les réductions du baromètre au niveau de la mer, il serait bon de calculer dans chaque Observatoire météorologique, une table spéciale donnant immédiatement, à la simple lecture, la hauteur barométrique réduite au niveau de la mer, qui correspond à une hauteur barométrique et à une température données. Voici comment on pourrait y parvenir.

Reprenons la formule

$$x = A \frac{t}{h} \left(\frac{1 - a\varpi}{2 - a\varpi} \right) (h_0 - h),$$

et donnons-lui la forme

$$\frac{x}{A}\left(\frac{2-ax}{1-ax}\right)=t\left(\frac{h_0-h}{h}\right).$$

L'altitude x étant constante, le premier membre de cette équation sera égal à une constante b, qu'on pourra calculer une fois pour toutes. Cela posé, on aura

$$h_0=\left(\frac{b}{t}+1\right)h.$$

A l'aide de cette formule, en donnant à t et à h toutes les valeurs comprises entre les plus grands écarts du thermomètre et du baromètre, qui ont lieu à l'Observatoire, on pourra former une table à double entrée, avec les arguments t et h, donnant la hauteur du baromètre réduite au niveau de la mer.

Notre table est calculée pour une valeur du coefficient

$$a=0,00008.$$

Avec un autre coefficient, les altitudes seraient différentes; mais on pourra passer des unes aux autres. Soit a' une autre valeur du coefficient, on aura, pour l'altitude correspondante à la valeur a',

$$x'=\frac{1}{a'}+z-\sqrt{\frac{1}{a'^2}+z^2}.$$

En soustrayant la valeur de

$$x=\frac{1}{a}+z-\sqrt{\frac{1}{a^2}+z^2},$$

et développant en série les radicaux, il vient

$$x' - x = \frac{1}{2}(a - a')z^2 - \frac{1}{8}(a^3 - a'^3)z^4 + \frac{1}{16}(a^5 - a'^5)z^6 + \text{etc.}.$$

Ordinairement a' différera très-peu de a, et il suffira de se borner au premier terme; alors la correction qu'on doit faire subir à l'altitude sera donnée par

$$\Delta = -\frac{1}{2}\delta z^2,$$

Δ étant la correction, et δ l'accroissement du coefficient a.

Lorsque la température de l'air, à la station inférieure, sera connue, la valeur de a sera donnée par la formule

$$a = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 x} = \frac{\left(\frac{h_0}{t_0}\right)^2 - \left(\frac{h}{t}\right)^2}{A\frac{h_0}{t_0}(h_0 - h)}.$$

Mais dans ce cas, au lieu de se servir de la table, il sera toujours préférable d'employer la formule

$$x = A\frac{h_0 - h}{\frac{h_0}{t_0} + \frac{h}{t}},$$

qui donne directement la hauteur, ou les tables qu'on en déduit, tables que je me propose de présenter bientôt à l'Académie.

EXPLICATION DE LA TABLE.

La première colonne verticale à gauche contient les hauteurs du baromètre, de centimètre en centimètre, depuis 40 cent. jusqu'à 80.

La première colonne horizontale contient les températures, de 5 en 5 degrés du thermomètre centésimal, depuis $-15°$ jusqu'à $+30°$.

La hauteur du baromètre, dans la station supérieure, étant donnée, on la réduira d'abord à zéro. Il existe des tables qui permettent de faire cette réduction facilement. A défaut de ces tables, il suffira de se rappeler que la colonne du baromètre se dilate de $\frac{1}{1000}$ de sa longueur pour chaque $6°,2$ d'augmentation de la température du mercure, si l'échelle est en laiton.

Comme cette correction est en général assez petite, et que le but principal de notre table est de fournir le moyen de trouver rapidement l'altitude, on pourra ordinairement omettre de ramener le baromètre à zéro, et se contenter d'employer la hauteur barométrique telle qu'elle est donnée directement.

Quoi qu'il en soit, on cherchera la hauteur barométrique dans la première colonne verticale de la table; ensuite on suivra la ligne horizontale correspondant à cette hauteur, jusqu'à ce qu'on arrive à la colonne qui répond à la température de l'air observée; le nombre qu'on trouvera à la rencontre de ces deux colonnes sera l'altitude demandée, exprimée en mètres.

Je suppose, par exemple, qu'on ait les données suivantes :

Hauteur du baromètre . . . . . 60^{cm}
Thermomètre libre . . . . . 10°

On entre dans la table avec la hauteur 60^{cm}, et l'on trouve, dans la colonne marquée 10°, le nombre 2030^{m}. C'est la hauteur de la station au-dessus du niveau de la mer.

Lorsque la hauteur du baromètre n'est pas exprimée en un nombre entier de centimètres, ni la température en un multiple de 5, on aura égard aux quantités au-dessus de 1 centimètre et de 5 degrés, en prenant des parties proportionnelles.

Exemple — Sommet du mont Viso :

Hauteur du baromètre, ramenée à zéro . . . 483^{mm},6
Température de l'air . . . . . 6°.

Pour 480^{mm} et 5° la table donne 3900^{m} avec la différence 55^{m} pour 5°, c'est-à-dire 11^{m} pour 1°; et la différence 172^{m} pour 10^{mm}, c'est-à-dire 17^{m},2 pour 1^{mm}, ce qui fait 62^{m} pour 3^{mm},6; c'est donc 11^{m} qu'il faut ajouter et 62^{m} qu'il faut retrancher pour avoir l'altitude qui répond à 6° et à 483^{mm},6. On obtient ainsi 3849^{m} pour l'altitude du mont Viso.

Supposons maintenant qu'on apprenne qu'à Verzuolo le baromètre marquait 723^{mm},9, au moment où l'observation au sommet avait lieu. Pour trouver la hauteur du sommet du mont Viso au-dessus de Verzuolo, on posera la proportion

$$723{,}9 : 483{,}6 :: 760 : x,$$

d'où l'on tire

$$x = 507,7 \text{ millim.}$$

La table donne pour 500^{mm} et 5°, 3558^{m}, avec la différence 51^{m} pour 5°, c'est-à-dire $10^{m},2$ pour 1° et la différence 168^{m} pour 10^{mm}, c'est-à-dire 16,8 pour 1 millimètre. On doit donc ajouter $10^{m},2$ et retrancher

$$16,8 \times 7,7 = 129^{m},4,$$

pour avoir l'altitude qui répond à 6° et à $507^{mm},7$. On obtient ainsi 3439^{m}, pour la hauteur du mont Viso au-dessus de Verzuolo.

Lors de l'observation, le thermomètre marquait à Verzuolo 27°,15. D'après cela, on a pour la valeur de a, au moment de l'observation,

$$a = \frac{\left(\frac{h_0}{t_0}\right)^2 - \left(\frac{h}{t}\right)^2}{A\frac{h_0}{t_0}(h_0 - h)},$$

$$a = \frac{\left(\frac{723,9}{301,15}\right)^2 - \left(\frac{483,6}{280}\right)^2}{(58,8)\left(\frac{723,9}{301,15}\right)(240,3)} = 0,0000823,$$

c'est-à-dire une valeur qui surpasse de 0,0000023 celle qui a été adoptée pour construire la table. Il s'ensuit que, pour avoir la vraie hauteur, il est nécessaire de faire une correction qui sera donnée par la formule

$$\Delta = -\frac{1}{2}.(0,0000023)\,z^2.$$

On a pour $h = 507^{mm},7$ et $t = 280°$

$$z = 4091^{m},$$

donc

$$\Delta = -19^{m}.$$

La hauteur sera ainsi

$$3420^{m}.$$

La formule barométrique donne la hauteur égale à

$$3420^{m},4,$$

en y faisant entrer la température de la station inférieure.

Comme exemple de l'usage de la table pour réduire les observations barométriques à un autre niveau, supposons qu'un baromètre marque 700^{mm}, à l'altitude de 750^{m}, la température de l'air étant 16°; et cherchons quelle serait la hauteur du baromètre à une station dont l'altitude est de 400^{m}.

On commence par chercher, dans la table, la hauteur barométrique correspondant à la température 16° et à l'altitude 350 (différence de 750^{m} à 400^{m}) et l'on trouve $729^{mm},6$ pour cette hauteur barométrique. On établit ensuite la proportion

$$729,6 : 760 :: 700 : x,$$

d'où l'on tire

$$x = 729^{mm},2;$$

ce sera la hauteur cherchée du baromètre.

TABLE BAROMÉTRIQUE

TABLE BAROMÉTRIQUE

donnant l'altitude en mètres, en regard de la hauteur du baromètre et de la température.

COLONNE barométrique en centimètres	Température de l'air en degrés centésimaux										COLONNE barométrique en centimètres
	— 15°	— 10°	— 5°	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	
40	5098	5166	5233	5300	5365	5430	5493	5556	5618	5679	40
41	4911	4978	5044	5110	5175	5238	5301	5363	5424	5485	41
42	4727	4793	4858	4922	4985	5048	5111	5172	5233	5292	42
43	4545	4610	4674	4737	4799	4861	4922	4982	5042	5101	43
44	4366	4429	4492	4554	4615	4675	4735	4796	4854	4911	44
45	4190	4251	4312	4373	4433	4492	4551	4609	4666	4723	45
46	4016	4076	4136	4194	4253	4311	4368	4425	4481	4537	46
47	3845	3903	3961	4018	4075	4132	4188	4243	4298	4352	47
48	3676	3733	3789	3845	3900	3955	4010	4063	4117	4170	48
49	3510	3565	3620	3674	3728	3781	3834	3886	3938	3990	49
50	3348	3401	3453	3506	3558	3609	3661	3712	3762	3811	50
51	3187	3238	3289	3340	3390	3440	3489	3538	3587	3636	51
52	3030	3079	3128	3177	3225	3273	3321	3368	3415	3462	52
53	2875	2922	2969	3016	3063	3109	3155	3200	3246	3291	53
54	2723	2768	2813	2858	2903	2947	2991	3035	3078	3122	54
55	2574	2617	2660	2703	2746	2788	2830	2872	2914	2955	55
56	2427	2468	2509	2550	2591	2632	2672	2711	2751	2791	56
57	2283	2322	2361	2400	2439	2477	2515	2553	2591	2629	57
58	2142	2179	2216	2252	2289	2325	2362	2399	2434	2470	58
59	2003	2038	2073	2107	2142	2176	2211	2245	2279	2313	59

62	1602	1630	1659	1687	1716	1744	1772	1800	1828	1856	62
63	1473	1499	1526	1552	1578	1605	1631	1657	1683	1709	63
64	1347	1371	1395	1419	1444	1468	1492	1516	1540	1564	64
65	1223	1245	1267	1289	1311	1333	1355	1377	1399	1421	65
66	1101	1121	1141	1161	1181	1201	1221	1241	1261	1281	66
67	981	999	1017	1035	1053	1071	1089	1107	1125	1143	67
68	864	880	896	912	928	944	960	976	991	1007	68
69	749	762	776	790	804	818	832	846	860	874	69
70	636	648	659	671	683	695	707	719	731	743	70
71	525	535	544	554	564	574	584	594	604	614	71
72	416	424	432	440	447	455	463	471	479	487	72
73	309	315	321	327	333	338	344	350	356	362	73
74	204	208	212	216	220	224	228	231	235	239	74
75	101	103	105	107	109	111	113	115	117	119	75
76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	76
77	— 99	—100	—102	—104	—106	—108	—110	—112	—114	—116	77
78	—197	—201	—204	—208	—212	—216	—220	—224	—227	—231	78
79	—293	—298	—304	—310	—315	—321	—327	—333	—338	—344	79
80	—387	—394	—402	—409	—417	—425	—432	—440	—447	—455	80
	— 15°	— 10°	— 5°	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	

Cette table permet de résoudre rapidement les trois questions suivantes:

1° Etant données la hauteur barométrique et la température à une station, trouver la hauteur de cette station au-dessus du niveau de la mer, en supposant qu'à ce niveau le baromètre marque 76 centimètres;

2° Etant données la hauteur barométrique et la température à une station, et la hauteur barométrique à une autre station, trouver la différence de niveau entre les deux stations;

3° Etant données la différence de niveau entre deux stations, et les indications du baromètre et du thermomètre à l'une des stations, réduire la hauteur du baromètre à ce qu'elle serait à l'autre station.

Exemples.

I. Une observation faite au sommet d'une montagne a donné:

Hauteur du baromètre (ramenée à zéro)	61 centimètres
Température de l'air	10 degrés.

Suivez la ligne horizontale à la gauche de laquelle est placé le nombre 61 centim., jusqu'à la rencontre de la colonne verticale au haut de laquelle est placé le nombre 10°; le nombre 1886 qu'on y trouve, sera l'altitude cherchée exprimée en mètres.

Mesure de l'altitude du mont Viso. — Une observation faite au sommet, le 12 août 1863, a donné

Hauteur du baromètre (à zéro)	48^{cm}, 36
Thermomètre libre	6°

On trouve dans la table, en face de la double entrée, ... $\left\{\begin{matrix}48^{cm}\\5^{\circ}\end{matrix}\right\}$ 3900^{m}

avec une différence de 172 m. pour 1 cm. et de 55^{m} pour 5°.

A ajouter pour 1°	11
	3911
A déduire pour $0^{cm},36$ $0,36 \times 172 =$	62
Altitude du mont Viso . . .	3849^{m}.

II. On demande, dans le premier exemple, la hauteur de la cime de la montagne au-dessus de sa base où les indications du baromètre, au même instant, ont donné :

Hauteur du baromètre . .	$74^{cm},23$
Température du mercure .	17°, 9.

Pour réduire la colonne barométrique à la température de zéro, on en retranche $\frac{1}{1000}$ de sa longueur, pour chaque 6°,2. Ainsi, puisque

$$\frac{17,9}{6,2} = 2,9\,,$$

on doit retrancher de la hauteur barométrique

$$0,0742 \times 2,9 = 0^{cm},22\,.$$

La hauteur barométrique, ramenée à zéro, à la base de la montagne, est donc

$$74,23 - 0,22 = 74^{cm},01\,.$$

Pour avoir l'argument avec lequel on doit entrer dans la table, on établit la proportion

$$74{,}01 : 61 :: 76 : x ;$$

d'où l'on déduit

$$x = 62^{cm},64 .$$

On trouve dans la table, en face de la double entrée, ... $\left\{ \begin{matrix} 62^{cm} \\ 10^{\circ} \end{matrix} \right\}$ 1744^{m}.

A déduire pour 0,64 $\quad 0{,}64 \times 139 =$ $\quad 89$

Hauteur de la montagne au-dessus de sa base $\quad 1655^{m}$.

III. Réduire au niveau de la mer la hauteur barométrique $74^{cm},18$, observée à l'altitude 276^{m}, la température de l'air étant $3^{\circ},4$.

Dans la colonne verticale 0° de la table, l'altitude 276^{m} répond à la hauteur barométrique $73^{cm},46$; dans la colonne verticale 5° de la table, l'altitude 276 répond à la hauteur barométrique 73,5. Par conséquent, la hauteur du baromètre qui répond à $3^{\circ},4$ et à 276^{m} est 73,49. La proportion

$$73{,}49 : 76 :: 74{,}18 : x$$

donne $x = 76^{cm},71$, pour la hauteur demandée du baromètre au niveau de la mer.

TABLEAU GRAPHIQUE

DONNANT À VUE L'ALTITUDE

D'APRÈS LA HAUTEUR BAROMÉTRIQUE.

TABLEAU GRAPHIQUE

DONNANT À VUE L'ALTITUDE D'UNE STATION

AU MOYEN

DE LA SEULE OBSERVATION DU BAROMÈTRE ET DU THERMOMÈTRE

À CETTE MÊME STATION.

(*Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, vol. III, novembre 1867).

Toute relation entre trois variables, qu'elle soit ou non susceptible d'être exprimée par les signes de l'analyse mathématique, est censée connue dès qu'on a une table numérique à double entrée, donnant la valeur de l'une des trois variables en regard des combinaisons qu'on peut former avec les deux autres.

Une pareille table présente cependant un inconvénient en pratique, c'est celui d'exiger des interpolations assez laborieuses, lorsque les arguments sont intermédiaires aux arguments inscrits dans la table.

Quand il s'agit de travaux rapides, on préfère, avec raison, aux tables exclusivement chiffrées, des tableaux graphiques donnant à vue le résultat cherché.

On passe, comme l'on sait, d'une table numérique à un tableau graphique, en considérant les deux arguments de la table comme les coordonnées horizontales d'une surface

courbe dont l'ordonnée verticale représente la fonction donnée par la table.

Le procédé employé, pour figurer sur un plan la surface courbe qui résulte de la relation donnée entre les trois variables, consiste à couper la surface par une série de plans horizontaux, et à projeter, sur le plan horizontal des coordonnées, les courbes d'intersection qu'on appelle des *lignes de niveau*. En affectant alors à chacune un chiffre ou une *cote* indiquant la hauteur du plan coupant qui l'a déterminée, on aura, sur un plan unique, la représentation fidèle de la relation donnée entre les trois variables.

C'est le même procédé employé, dans les travaux topographiques, pour rendre sur un plan horizontal le relief d'un terrain.

La méthode de la représentation des lois à deux variables, par une courbe plane isolée, et des lois à trois variables, par une série de courbes cotées, a reçu de nos jours des applications très-variées et très-nombreuses, et peut rendre de véritables services dans une foule de recherches; car elle ramène à des faits de pure intuition des rapports que l'esprit ne saurait saisir sans efforts, dans leur nature abstraite, en n'employant que des signes d'une autre espèce.

En 1866, j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie (*) une table numérique donnant immédiatement l'altitude d'une station avec ces seuls arguments: *hauteur du baromètre et hauteur du thermomètre libre à la station supérieure*. J'ai pensé depuis qu'il pourrait être utile de convertir cette table, exclusivement chiffrée, en un plan coté

(*) *Atti della Reale Accademia delle Scienze*, vol. II, décembre 1866.

donnant à simple vue l'altitude qui correspond à la pression et à la température de l'air, observées à la station supérieure. C'est ce plan coté que je soumets aujourd'hui à l'Académie.

Qu'on me permette d'exposer en peu de mots la méthode que j'ai employée pour le construire.

Dans le Mémoire cité plus haut j'ai fait voir que la hauteur z d'une station, la hauteur h du baromètre réduite à zéro, et la température absolue t de l'air sont liées ensemble par l'équation

$$\frac{z}{A}\left(\frac{2-az}{1-az}\right)=t\left(\frac{h_0}{h}-1\right),$$

h_0 étant la hauteur du baromètre à la station inférieure;

$$A=58,8$$

$$a=0,00008$$

étant deux constantes.

Concevons maintenant deux axes rectangulaires: portons sur l'axe des abscisses les températures t, et sur l'axe des ordonnées les hauteurs h du baromètre. Si au point de rencontre des deux coordonnées t et h on élève une perpendiculaire égale à z, l'extrémité de cette perpendiculaire se trouvera sur la surface qui représente l'équation donnée.

Pour chaque ligne de niveau on aura

$$z=c,$$

c désignant une constante quelconque: par conséquent, l'équation d'une ligne de niveau sera

$$t\left(\frac{h_0}{h}-1\right)=\frac{c}{A}\left(\frac{2-ac}{1-ac}\right),$$

ou bien

$$t\left(\frac{h_0}{h}-1\right)=C,$$

en posant

$$\frac{c}{A}\left(\frac{2-ac}{1-ac}\right)=C.$$

Si l'on fait maintenant

$$h=h_0-y,$$

$$t=x-C,$$

on obtient, pour l'équation d'une ligne de niveau,

$$xy=Ch_0;$$

c'est l'équation d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.

Les lignes de niveau sont donc, dans notre cas, autant d'hyperboles dont les asymptotes, parallèles aux axes des coordonnées, ont pour équation

$$h=h_0$$

$$t=-C.$$

De plus, elles passent toutes par l'origine, car l'équation est satisfaite par le couple de valeurs

$$h=0,$$

$$t=0.$$

Quand on aura les asymptotes et un point de la courbe, on décrira bien simplement par points l'une quelconque des hyperboles avec le secours de la propriété connue qu'a toute sécante de donner deux segments égaux entre les asymptotes et la courbe.

Pour des valeurs négatives de z, C est négatif. Alors l'équation devient

$$xy = -Ch_0.$$

C'est l'équation de l'hyperbole conjuguée, située dans l'angle supplémentaire des axes, entre $-y$ et $+x$.

Pour la valeur

$$z = 0,$$

on a

$$C = 0,$$

et l'équation de la ligne de niveau devient

$$xy = 0;$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, la courbe se réduit à ses asymptotes.

Dans le tableau graphique que je soumets à l'Académie, les lignes de niveau sont tracées de 100 en 100 mètres depuis -500^m jusqu'à $+1000^m$, et de 200 en 200 mètres depuis 1000^m jusqu'à 9000^m. Je n'ai pas cru nécessaire de prolonger l'échelle des hauteurs barométriques au delà de 80^{cm} et 20^{cm}, ni celle des températures au delà de 60° et $-40°$. Bien rares seront en pratique les cas qui sortiront de ces limites.

La série des valeurs de C qui correspond aux valeurs croissantes de z, dont je me suis servi pour la construction du tableau, est la suivante:

$z = -500^m$	$C = -16,7$
$z = -400$	$C = -13,4$
$z = -300$	$C = -10,1$
$z = -200$	$C = -6,7$
$z = -100$	$C = -3,4$
$z = 0$	$C = 0$
$z = 100$	$C = 3,4$
$z = 200$	$C = 6,9$
$z = 300$	$C = 10,3$
$z = 400$	$C = 13,8$
$z = 500$	$C = 17,4$
$z = 600$	$C = 20,9$
$z = 700$	$C = 24,5$
$z = 800$	$C = 28,1$
$z = 900$	$C = 31,8$
$z = 1000$	$C = 35,5$
$z = 1200$	$C = 43,0$
$z = 1400$	$C = 50,6$
$z = 1600$	$C = 58,4$
$z = 1800$	$C = 66,3$
$z = 2000$	$C = 74,5$
$z = 2200$	$C = 82,8$
$z = 2400$	$C = 91,3$
$z = 2600$	$C = 100,0$
$z = 2800$	$C = 108,9$
$z = 3000$	$C = 118,1$
$z = 3200$	$C = 127,5$

$z = 3400$	$C = 137,2$
$z = 3600$	$C = 147,2$
$z = 3800$	$C = 157,4$
$z = 4000$	$C = 168,0$
$z = 4200$	$C = 178,9$
$z = 4400$	$C = 190,2$
$z = 4600$	$C = 201,9$
$z = 4800$	$C = 214,1$
$z = 5000$	$C = 226,7$
$z = 5200$	$C = 239,8$
$z = 5400$	$C = 253,4$
$z = 5600$	$C = 267,7$
$z = 5800$	$C = 282,6$
$z = 6000$	$C = 298,2$
$z = 6200$	$C = 314,5$
$z = 6400$	$C = 331,8$
$z = 6600$	$C = 349,9$
$z = 6800$	$C = 369,1$
$z = 7000$	$C = 389,5$
$z = 7200$	$C = 411,1$
$z = 7400$	$C = 434,1$
$z = 7600$	$C = 458,8$
$z = 7800$	$C = 485,5$
$z = 8000$	$C = 513,8$
$z = 8200$	$C = 544,7$
$z = 8400$	$C = 578,2$
$z = 8600$	$C = 614,8$
$z = 8800$	$C = 655,0$
$z = 9000$	$C = 699,4$

USAGE DU TABLEAU GRAPHIQUE.

Pour se servir du tableau graphique, la hauteur du baromètre, réduite à zéro, doit être prise sur l'axe vertical, et la température sur l'axe horizontal ; l'altitude se lit alors sur la courbe transversale qui passe par le point d'intersection de deux coordonnées rectangulaires émanant de la hauteur et de la température.

Si les points de départ ou d'intersection correspondent à des intervalles, on lira la valeur des variables corrélatives en interpolant à vue par parties proportionnelles.

1er *Exemple.* — On demande l'altitude d'une station où le baromètre marque $67^{cm},5$ et le thermomètre 10°. — Suivez l'horizontale qui prend son origine sur l'échelle des hauteurs au chiffre $67^{cm},5$ jusqu'à la rencontre de la verticale qui a 10° pour chiffre de départ, la courbe transversale passant par le point d'intersection dont la cote est 1000 vous fournira la réponse, soit ici 1000^{m}.

2e *Exemple.* — On demande l'altitude d'une station où le baromètre marque $48^{cm},36$ et le thermomètre 6°. — Prenez pour origine sur l'échelle des hauteurs $48^{cm},36$, en l'intercalant à vue entre 48,3 et 48,4 et suivez l'horizontale correspondante jusqu'au point où elle vient couper la verticale marquée 6°. Le point de rencontre se trouvant à peu près au quart de l'intervalle entre les deux lignes de niveau cotées 3800 et 4000, l'altitude demandée sera 3850^{m}.

Le même tableau peut aussi donner la différence de niveau de deux stations au moyen des hauteurs barométriques à ces stations, et de la température de l'air à la station supérieure. On n'a alors qu'à multiplier par 76^{cm} le rapport des hauteurs du baromètre aux deux stations, et l'on obtiendra la hauteur barométrique avec laquelle il faut entrer dans le tableau. L'altitude qu'on trouvera en regard sera la différence de niveau des deux stations (*).

3e *Exemple.* — On demande la différence de niveau entre deux stations où le baromètre marque respectivement 48^{cm}, 36 et 72^{cm},39, la température étant 6° à la station supérieure. — On a

$$76 \times \frac{48,36}{72,39} = 50^{cm},77 .$$

Le tableau donne, pour la hauteur barométrique 50^{cm},77 et la température 6°, une altitude de 3440^{m}. C'est la différence de niveau demandée.

L'usage de ce tableau ne se borne point à ces trois problèmes. Toute question dans laquelle deux des variables étant données, on demande la troisième, peut être résolue par le tableau. Par exemple, il peut servir à réduire au niveau de la mer une observation barométrique faite à une altitude donnée.

4e *Exemple.* — Réduire au niveau de la mer la hauteur barométrique $71^{cm},2$, observée à l'altitude de 500^{m}, la température de l'air étant 5°. — Cherchez d'abord le point

(*) Voyez, pour la démonstration, le mémoire précédent, pag. 243.

de rencontre de la verticale émanant du point 5° avec la ligne de niveau cotée 500. Ensuite, suivez de ce dernier point l'horizontale qui y aboutit jusqu'à l'échelle des hauteurs, on y lira $71^{cm},5$, pour la hauteur barométrique qui répond à 5° et à 500^{m}. En multipliant 76^{cm} par le rapport des hauteurs

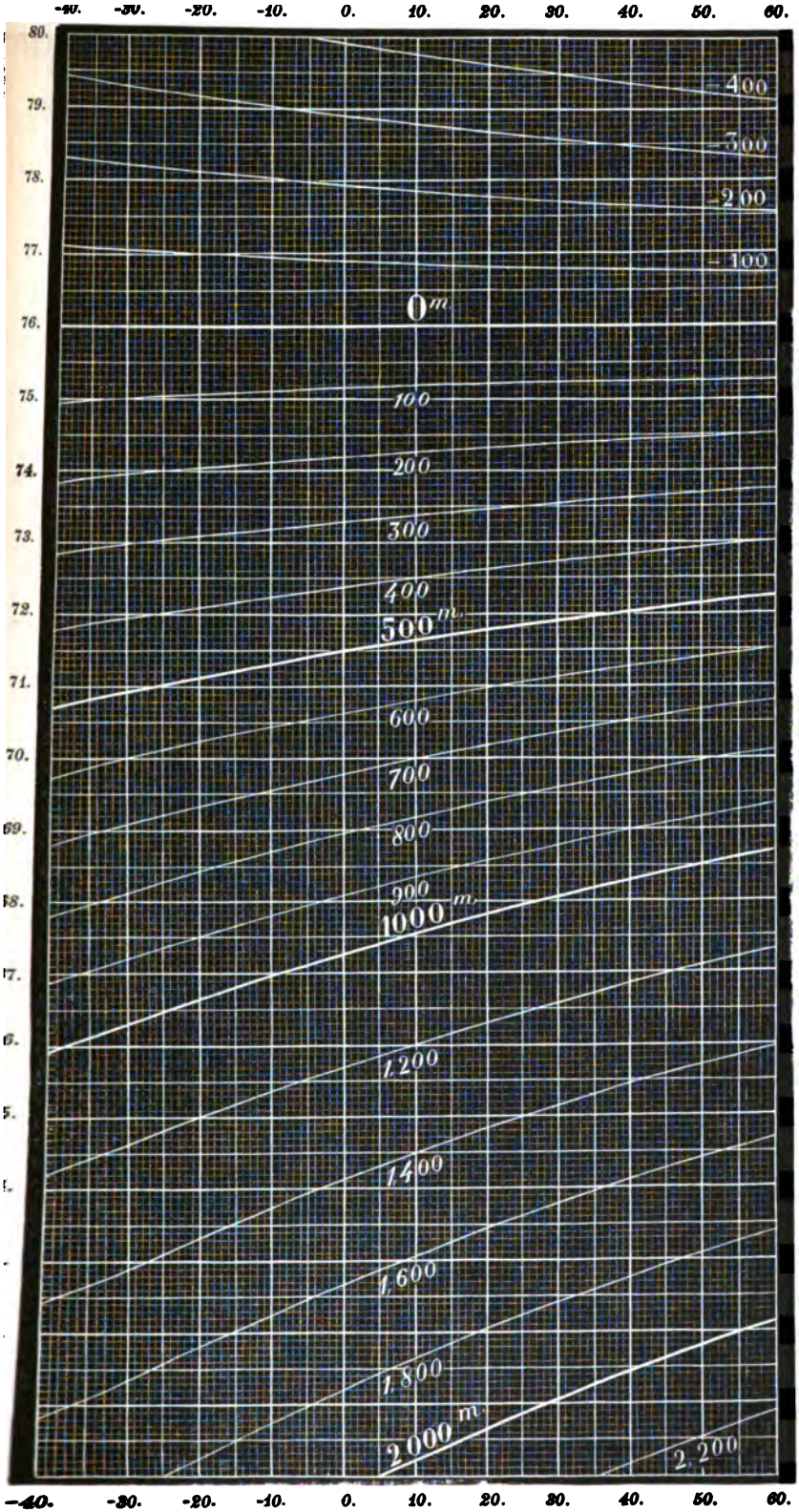
$$\frac{71,2}{71,5},$$

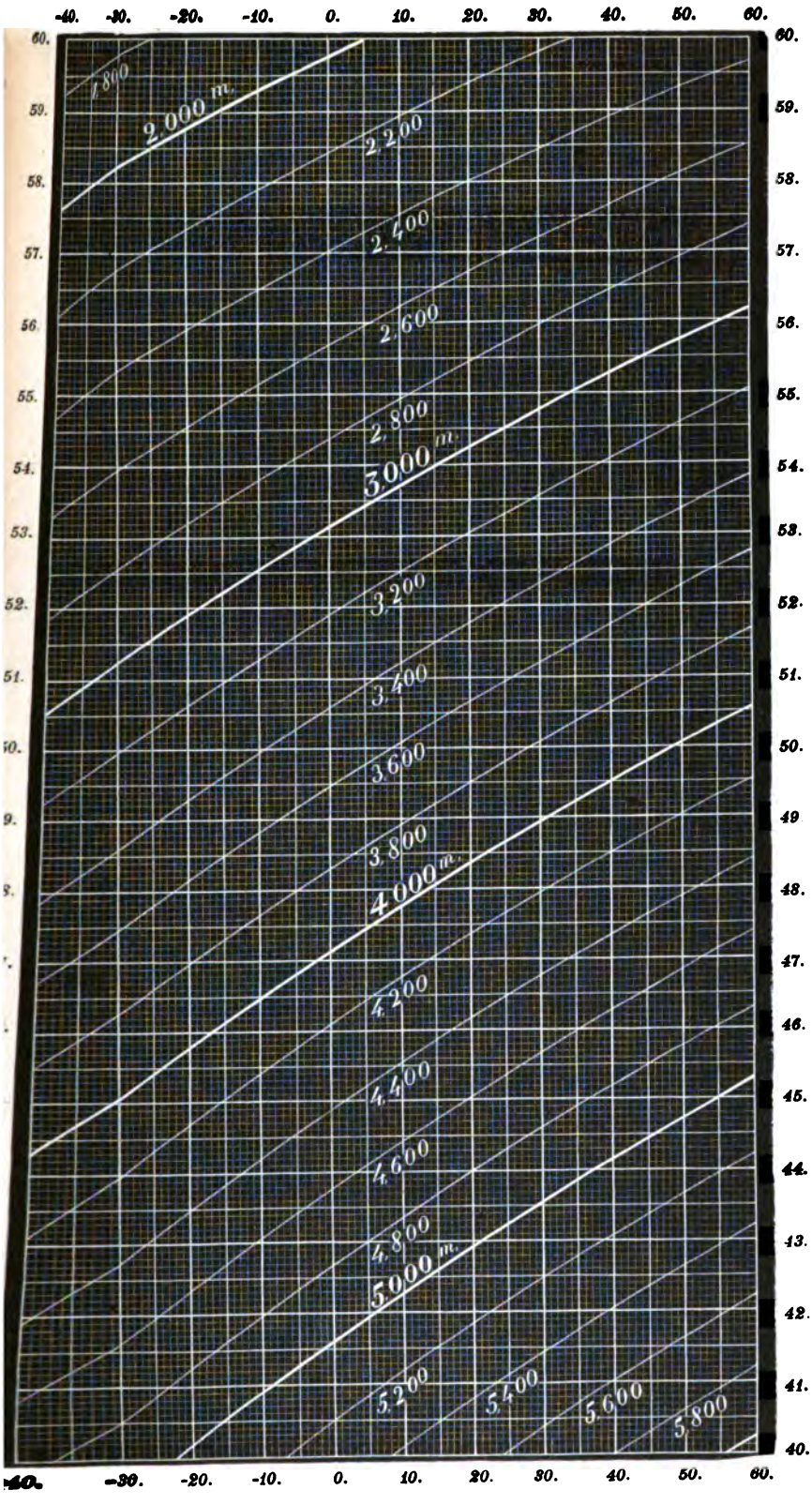
on trouve 75,68, pour la hauteur demandée du baromètre au niveau de la mer.

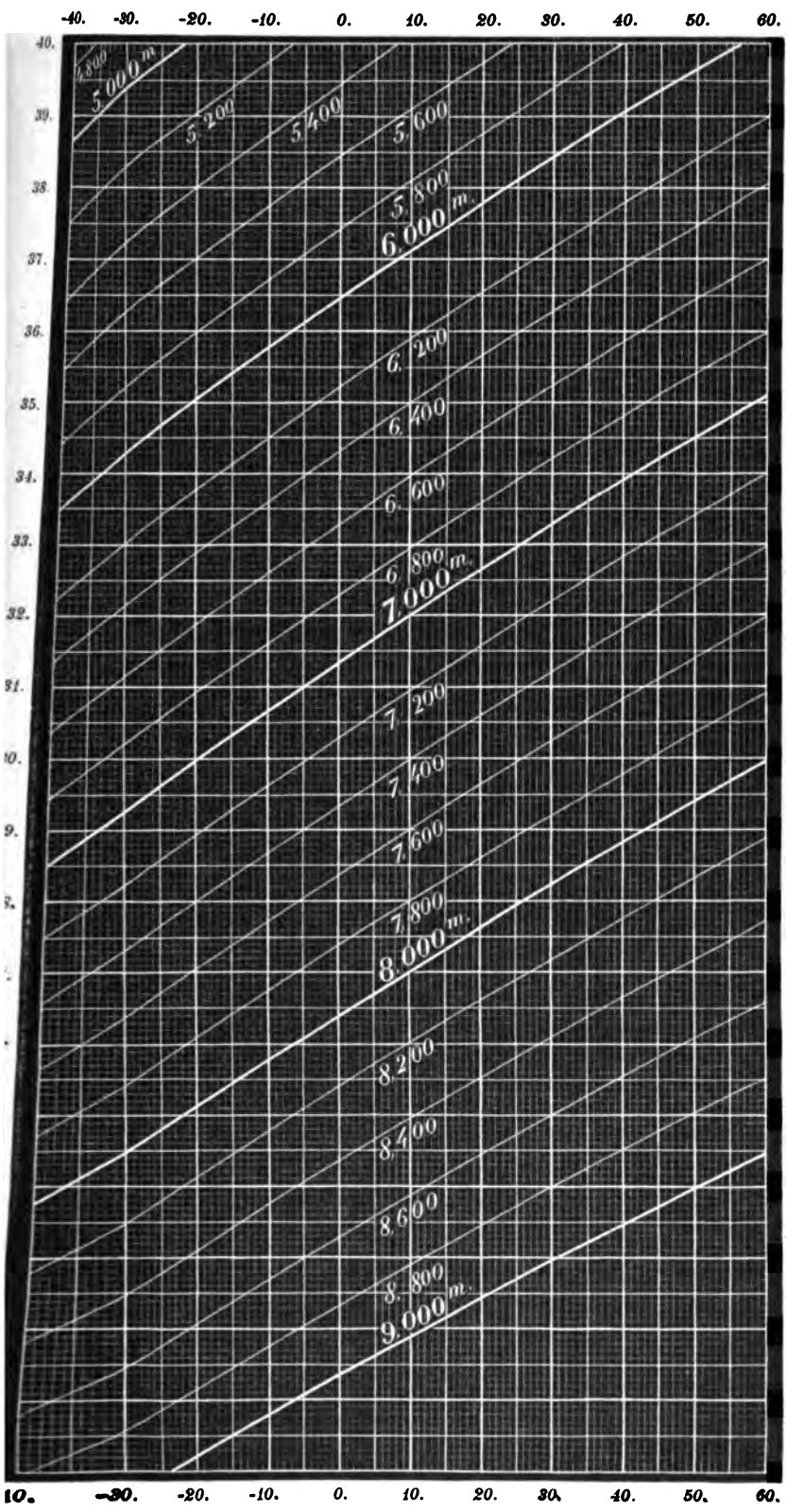
PLAN COTÉ

REPRÉSENTANT

LA RELATION ENTRE LA HAUTEUR DU BAROMÈTRE
ET LA TEMPÉRATURE DE L'AIR OBSERVÉES À UNE STATION
ET L'ALTITUDE DE CETTE STATION.


-400
-300
-200
-100
0m
100
200
300
400
500m
600
700
800
900
1000m
1,200
1,400
1,600
1,800
2,000m
2,200


TEMPÉRATURES EN DEGRÉS CENTÉSIMAUX.
-40. -30. -20. -10. 0. 10. 20. 30. 40. 50. 60.
60. 59. 58. 57. 56. 55. 54. 53. 52. 51. 50. 49 48. 47. 46. 45. 44. 43. 42. 41. 40.
1,800
2,000 m.
2,200
2,400
2,600
2,800
3,000 m.
3,200
3,400
3,600
3,800
4,000 m.
4,200
4,400
4,600
4,800
5,000 m.
5,200
5,400
5,600
5,800


TEMPÉRATURES EN DEGRÉS CENTÉSIMAUX.
-40. -30. -20. -10. 0. 10. 20. 30. 40. 50. 60.
40. 39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20.
4,800
5,000 m.
5,200
5,400
5,600
5,800
6,000 m.
6,200
6,400
6,600
6,800
7,000 m.
7,200
7,400
7,600
7,800
8,000 m.
8,200
8,400
8,600
8,800
9,000 m.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

PAR LE MOYEN D'UNE RÈGLE GLISSANTE.

DE LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS

À TROIS VARIABLES

PAR LE MOYEN D'UNE RÈGLE GLISSANTE.

Caractère auquel on reconnaît qu'une telle résolution est possible. Graduation de la règle.

(Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, serie II, t. XXV).

Peu de temps après l'invention des logarithmes, on eut l'idée, en s'appuyant sur les propriétés de ces nouvelles quantités transcendantes, d'effectuer les opérations de l'arithmétique au moyen d'une échelle graduée, de manière qu'on pût y lire immédiatement le résultat cherché.

Divers instruments ont été construits à cet effet, parmi lesquels le plus connu est la *règle à calcul*, ou *règle logarithmique*, qui présente un moyen facile et prompt de résoudre, à la simple lecture, d'assez nombreuses opérations de calcul.

Dans ces derniers temps, en m'occupant de la rédaction de tables pour le calcul des différences de niveau, mesurées par le baromètre, j'ai été conduit à imaginer une règle glissante, analogue à la règle logarithmique, au moyen de laquelle on peut obtenir mécaniquement les résultats que fournissent les tables barométriques.

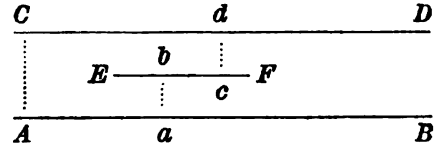
En réfléchissant sur cette réduction des tables à double entrée en une règle glissante, je me suis aperçu qu'on peut, dans certains cas, résoudre certaines équations à trois variables au moyen d'une règle glissante graduée d'une manière convenable.

Je me propose, dans cette note, de donner le caractère auquel on reconnaît que la réduction d'une équation à trois variables en une règle glissante est possible; et la manière d'opérer cette réduction, quand elle est possible.

Soit

$$[1] \quad \ldots \ldots \quad F(x, y, z) = 0$$

une équation donnée entre trois variables. Il s'agit de construire trois échelles, dont deux fixes et une mobile, glissant parallèlement entre les deux autres, de manière que, dans une position quelconque des trois échelles, les nombres correspondants qu'on y lit vérifient l'équation [1]. Supposons que les trois échelles soient disposées comme dans la figure



ci-jointe, AB, CD étant les échelles fixes et EF l'échelle mobile. Si $Aa = X$, $bc = Y$, $Cd = Z$, on a

$$Cd = Aa + bc,$$

ou bien

$$[2] \quad \ldots \ldots \quad Z = X + Y.$$

Or, si nous supposons Z fonction de la seule variable z, X fonction de la seule variable x, Y fonction de la seule variable y, pour que la règle puisse être substituée à l'équation donnée, il faudra que les deux équations [1] et [2] fournissent la même valeur de z pour les mêmes valeurs des variables indépendantes x et y.

Le problème d'analyse à résoudre est donc le suivant:

Une équation

$$[1] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(x, y, z) = 0,$$

entre trois variables étant donnée, la transformer en une autre équation

$$[2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Z = X + Y,$$

X, Y, Z étant respectivement des fonctions de x, y, z. Les valeurs de z tirées de ces deux équations doivent être égales pour les mêmes valeurs de x et de y.

Il peut arriver que l'on reconnaisse immédiatement la manière de transformer l'équation [1] dans l'équation [2]. Si, par exemple, on a

$$z = xy,$$

il suffit de prendre les logarithmes des deux membres pour avoir

$$\log z = \log x + \log y;$$

de sorte que, dans ce cas, on a

$$Z = \log z,$$
$$X = \log x,$$
$$Y = \log y.$$

On n'a donc qu'à graduer les échelles suivant les logarithmes des nombres naturels pour pouvoir exécuter avec la règle tous les calculs qu'exprime l'équation donnée.

Tel est le principe de la règle à calcul ordinaire. Comme dans ce cas la graduation des trois échelles est identique, deux échelles sont suffisantes.

La même transformation s'applique à l'équation beaucoup plus générale

$$\varphi(z) = \psi(x)\,\chi(y)\,;$$

en effet, si l'on prend les logarithmes des deux membres, il vient

$$\log\varphi(z) = \log\psi(x) + \log\chi(y)\,;$$

de manière qu'en graduant les échelles suivant les lois exprimées par

$$Z = \log\varphi(z)\,,$$
$$X = \log\psi(x)\,,$$
$$Y = \log\chi(y)\,,$$

on pourra, avec une règle glissante ainsi graduée, trouver toute valeur de z, correspondante à des valeurs de x et de y données.

C'est le cas de la formule pour calculer les hauteurs à l'aide du baromètre. J'ai fait voir ailleurs (*) qu'on peut mettre cette formule sous la forme

$$\frac{z}{A}\left(\frac{2-az}{1-az}\right) = (274+x)\left(\frac{y_0}{y}-1\right),$$

(*) *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, décembre 1866.

z étant la hauteur au-dessus d'un endroit où la colonne barométrique est y_0; x la température de l'air; y la hauteur du baromètre; A une constante dépendant du rapport de la densité du mercure à la densité de l'air; a une constante exprimant la diminution de la densité de l'air à mesure qu'on s'élève.

En posant

$$Z = \log \frac{z}{A} \left(\frac{2 - az}{1 - az}\right),$$

$$X = \log (274 + x),$$

$$Y = \log \left(\frac{y_0}{y} - 1\right),$$

il vient

$$Z = X + Y.$$

Il suffit donc de graduer les trois échelles suivant ces lois pour réduire la formule barométrique en une règle glissante. C'est sur ce principe que j'ai construit le *rhabdohypsologiste*, dont j'aurai bientôt l'occasion d'entretenir l'Académie.

On voit par ces deux exemples, que la réduction de l'équation [1] à l'équation [2] se présente quelquefois d'elle-même; mais, il peut arriver que la réduction soit possible, sans qu'on le reconnaisse immédiatement. Il devient donc nécessaire de chercher quelle est la condition pour que la réduction soit possible, et la manière de l'exécuter. On y parvient au moyen de la différentiation.

Les quantités x et y étant indépendantes, on peut regarder l'une comme constante, et différentier l'équation [2] par rapport à l'autre; dans ce cas z doit être considérée comme

fonction de cette autre quantité. En différentiant de la sorte l'équation [2] successivement par rapport à x et à y, on obtient

$$Z' \frac{dz}{dx} = X',$$

$$Z' \frac{dz}{dy} = Y'.$$

De ces équations on tire, en éliminant la fonction Z',

$$R = \frac{X'}{Y'},$$

en posant pour abréger

$$R = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}.$$

La valeur de R est donnée par l'équation [1]; en effet, si l'on différentie l'équation [1] par rapport à x, dont z est une fonction, on a

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

On a de même

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0.$$

On en tire

$$R = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}} = \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Maintenant, si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'équation

$$R = \frac{X'}{Y'},$$

on obtient

$$\log R = \log X' - \log Y'.$$

En différentiant par rapport à x, il vient

$$\frac{d \log R}{dx} = \frac{X''}{X'},$$

et ensuite par rapport à y,

$$\frac{d^2 \log R}{dx\,dy} = 0,$$

car X' et X'' ne sont fonctions que de x. Telle est la condition nécessaire pour que l'équation [1] puisse se transformer dans l'équation [2].

Lorsque cette condition est remplie, on déterminera la fonction X en intégrant deux fois l'équation

$$\frac{d \log R}{dx} = \frac{X''}{X'};$$

et la fonction Y en intégrant l'équation

$$Y' = \frac{X'}{R},$$

qui ne contient point x.

On obtiendra la valeur de Z soit en éliminant l'une des deux variables x et y entre les deux équations [1] et [2], ce

qui fera disparaître l'autre, soit en prenant pour variables indépendantes x et z, ou y et z.

Appliquons cette méthode à quelques exemples.

1ᵉ Exemple.

Soit l'équation proposée

$$z = xy + \sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2},$$

on en tire

$$\frac{dz}{dx} = y + x\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}},$$

$$\frac{dz}{dy} = x + y\sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}},$$

et par suite

$$R = \sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}},$$

$$\frac{d\log R}{dx} = -\frac{x}{1+x^2},$$

$$\frac{d^2\log R}{dxdy} = 0.$$

La réduction est donc possible. On aura pour déterminer X l'équation

$$\frac{X''}{X'} = -\frac{x}{1+x^2},$$

d'où l'on tire, en intégrant deux fois,

$$X' = \frac{A}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$X = A \log (x + \sqrt{1+x^2}) + B,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

On aura, pour déterminer Y',

$$Y' = \frac{X'}{R} = \frac{A}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$Y = A \log (y + \sqrt{1+y^2}) + C,$$

C étant une constante arbitraire.

Par conséquent

$$Z = A \log (x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) + \text{const.}$$

En ayant égard à l'équation proposée, il vient

$$Z = A \log (z + x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}) + \text{const.},$$

$$Z = A \log (z + \sqrt{z^2-1}) + \text{const.}$$

L'équation cherchée sera donc

$$\log (z + \sqrt{z^2-1}) = \log (x + \sqrt{x^2+1}) + \log (y + \sqrt{y^2+1}).$$

On aurait pu parvenir immédiatement au même résultat par l'emploi des fonctions hyperboliques.

En effet, posons

$$x = Shu, \qquad y = Shv.$$

A cause de la relation fondamentale des fonctions hyperboliques

$$Ch^2u - Sh^2u = 1,$$

on aura

$$\sqrt{1+x^2} = Chu,$$

$$\sqrt{1+y^2} = Chv.$$

L'équation proposée devient donc

$$z = ShuShv + ChuChv.$$

Or, on sait que le second membre est égal au cosinus hyperbolique de la somme des arcs u et v, de sorte qu'on aura

$$z = Ch(u+v);$$

d'où l'on tire

$$\text{Arg. } Chz = u+v = \text{Arg. } Shx + \text{Arg. } Shy.$$

Puisque

$$\text{Arg. } Chz = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \log\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\text{Arg. } Shx = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),$$

il vient enfin

$$\log(z+\sqrt{z^2-1}) = (x+\sqrt{x^2+1}) + \log(y+\sqrt{y^2+1}),$$

comme on avait trouvé plus haut.

2d Exemple.

Soit

$$z = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\sqrt{\cos^2\theta + z^2\sin^2\theta}\ ;$$

on en tire

$$\frac{dF}{dx} = y + x\,\frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{\cos^2\theta+z^2\sin^2\theta}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{dF}{dy} = x + y\,\frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\cos^2\theta+z^2\sin^2\theta}}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$R = \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\cdot\frac{y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}\sqrt{\cos^2\theta+z^2\sin^2\theta}}{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\sqrt{\cos^2\theta+z^2\sin^2\theta}},$$

ou bien, en substituant pour

$$\sqrt{\cos^2\theta + z^2\sin^2\theta},$$

sa valeur tirée de l'équation proposée,

$$R = \left(\frac{1-y^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{y-xz}{x-yz}\right).$$

De l'équation à transformer on tire

$$\sin^2\theta = \frac{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)};$$

d'où l'on déduit

$$\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta = \frac{(x-yz)^2}{(1-y^2)(1-z^2)},$$

$$\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta = \frac{(y-xz)^2}{(1-x^2)(1-z^2)}.$$

Ces valeurs, portées dans l'expression de R, donnent

$$R = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\sqrt{\frac{\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}},$$

et par suite

$$\log R = \frac{1}{2}\log\left\{(1-y^2)(\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta)\right\} - \frac{1}{2}\log\left\{(1-x^2)(\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta)\right\},$$

$$\frac{d\log R}{dx} = \frac{x}{1-x^2} - \frac{x\sin^2\theta}{\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{d^2\log R}{dx\,dy} = 0.$$

La réduction est donc possible. On déterminera X en intégrant l'équation

$$\frac{X''}{X'} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\left\{(1-x^2)(\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta)\right\},$$

et l'on obtiendra

$$X' = \frac{A}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}},$$

$$X = A\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}}.$$

On aura ensuite

$$Y' = \frac{X'}{R} = \frac{A}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta}},$$

$$Y = A\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta}}.$$

Par conséquent

$$Z = A\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}} + A\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta}}.$$

Pour déterminer Z en fonction de z, on pourra considérer x comme fonction de y et de z, et partir de l'équation

$$x = yz - \sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta},$$

qui est une transformation de l'équation proposée. On trouvera ainsi

$$Z = A\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + z^2\sin^2\theta}}.$$

Il suit de là que l'équation proposée se transforme dans l'équation suivante

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + z^2\sin^2\theta}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + x^2\sin^2\theta}} + \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta}}.$$

On tombe ainsi sur une propriété connue des fonctions elliptiques de première espèce. Si l'on pose en effet

$$x = \cos\varphi\,,$$
$$y = \cos\psi\,,$$
$$z = \cos\mu\,,$$

l'équation proposée devient

$$\cos\mu = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\mu}\,,$$

et l'équation dans laquelle nous l'avons transformée,

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\mu}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}} + \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\psi}}\,,$$

ce qui constitue une relation fondamentale entre les transcendantes elliptiques de première espèce, découverte par EULER (*).

(*) *Novi Comm. Petrop.* Tom. VI et VII.

HYPSOLOGISTE.

RÈGLE GLISSANTE

DONNANT LES DIFFÉRENCES DE NIVEAU

MESURÉES À L'AIDE DU BAROMÈTRE (*).

Toute formule propre à déterminer la différence de niveau de deux stations à l'aide du baromètre doit contenir au moins quatre variables indépendantes, savoir: les deux hauteurs du baromètre, corrigées de la dilatation du mercure, et les deux températures, observées toutes les quatre simultanément aux deux stations.

Une telle formule n'est point réductible immédiatement en tables numériques, car on sait que la construction d'une table n'est réellement praticable que pour les fonctions d'une et de deux variables. Mais on peut y parvenir en décomposant la formule en plusieurs autres.

Dans les tables dont on se sert ordinairement, telles que les tables de DELCROS et de l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, la formule est d'abord décomposée en deux termes de même forme, donnant la hauteur au-dessus

(*) Quoique écrit depuis longtemps, ce mémoire est resté jusqu'ici inédit. M. WILLIAM MATHEWS, JUN., qui a bien voulu servir d'intermédiaire pour faire construire cette règle glissante chez M. HICKS, à Londres, l'a décrite et en a donné la théorie, dans un article inséré dans l'*Alpine Journal* (vol. IV, August 1868), où il a eu la bonté de faire connaître au Club alpin anglais mes recherches sur l'hypsométrie.

(Note de 1874).

d'une origine commune, la température étant supposée égale à zéro.

Une même table à simple entrée fournit chacun de ces termes. La différence des deux hauteurs ainsi trouvées doit être ensuite multipliée par une fonction de la somme des températures.

Biot a, dans ses tables (*), évité cette multiplication qui ne laisse pas d'être ennuyeuse, au moyen d'une table à double entrée. Les arguments de ces tables sont la somme des températures et la hauteur du baromètre. On y entre d'abord avec la somme des températures et la hauteur du baromètre, observée dans la station supérieure, et l'on trouve un nombre; puis, avec la même somme des températures et la hauteur du baromètre observée dans la station inférieure, on entre de nouveau dans la même table, et l'on trouve un autre nombre. La différence de ces deux nombres est la différence de niveau.

Ces diverses tables sont fort utiles pour le calcul sédentaire des observations barométriques; mais on ne peut songer à les emporter avec soi dans les voyages de montagne et à s'en servir sur les lieux mêmes, à moins qu'on n'en réduise considérablement le volume. Mais alors il faudrait leur donner très-peu d'étendue, ce qui obligerait à faire usage d'interpolations laborieuses pour obtenir des résultats assez peu exacts.

En considérant les avantages qu'on tire de l'emploi de la règle logarithmique, dans les calculs arithmétiques, il m'est venu dans la pensée de remplacer les tables hypsométriques ordinaires par une règle glissante que toute

(*) *Tables barométriques portatives, donnant les différences de niveau par une simple soustraction.* Paris 1811.

personne s'occupant d'hypsométrie pourrait emporter avec soi pour s'en servir sur les lieux mêmes à calculer ses observations.

Je commencerai par exposer de quelle manière on peut réduire en règle glissante la formule hypsométrique de LAPLACE dont on se sert ordinairement.

Si l'on désigne par x la différence de niveau de deux stations ; par h_0 et θ_0 la hauteur du baromètre et du thermomètre dans la station inférieure ; et par h et θ les quantités analogues dans la station supérieure, on a entre ces quantités la relation

$$x = 18393 \left\{ 1 + \frac{2\,(\theta_0 + \theta)}{1000} \right\} \log \frac{h_0}{h} .$$

Les deux colonnes de mercure h_0 et h sont supposées ramenées à une même température, par exemple, à la température de la glace fondante.

Décomposons

$$\log \frac{h_0}{h}$$

en deux termes de même forme, savoir

$$\log \frac{0^m,76}{h} - \log \frac{0^m,76}{h_0} ,$$

on aura

$$x = 18393 \left\{ 1 + \frac{2\,(\theta_0 + \theta)}{1000} \right\} \log \frac{0,76}{h}$$

$$- 18393 \left\{ 1 + \frac{2\,(\theta_0 + \theta)}{1000} \right\} \log \frac{0,76}{h_0} .$$

On voit par là qu'il suffit que la règle glissante donne la quantité

$$18393 \left\{ 1 + \frac{2\,(\theta_0 + \theta)}{1000} \right\} \log \frac{0{,}76}{h}$$

pour toutes les valeurs que les quantités $\theta_0 + \theta$ et h peuvent acquérir, dans les observations ordinaires; car, quand les valeurs de $\theta_0 + \theta$, h et h_0 seront données, par une observation particulière, on trouvera d'abord l'altitude qui correspond à $\theta_0 + \theta$ et à h, et on en soustraira ensuite celle qui correspond à $\theta_0 + \theta$ et à h_0.

Afin de rendre calculable par le moyen d'une règle glissante la quantité

$$x = 18393 \left\{ 1 + \frac{2\,(\theta_0 + \theta)}{1000} \right\} \log \frac{0{,}76}{h},$$

il suffit de prendre les logarithmes. On a ainsi

$$\log x = \log \left(18393 \log \frac{0{,}76}{h} \right) + \log \left\{ 1 + \frac{2\,(\theta_0 + \theta)}{1000} \right\},$$

ou bien

$$\aleph = \beth + \gimel,$$

en posant

$$\aleph = \log x\,,$$

$$\beth = \log \left(18393 \log \frac{0{,}76}{h} \right),$$

$$\gimel = \log \left\{ 1 + \frac{2\,(\theta_0 + \theta)}{1000} \right\}.$$

Maintenant, si nous graduons les deux échelles fixes de la règle suivant les lois

$$\mathfrak{X} = \log x ,$$

$$\mathfrak{H} = \log \left(18393 \log \frac{0,76}{h} \right) ,$$

et l'échelle de la coulisse suivant la loi

$$\mathfrak{C} = \log \left\{ 1 + \frac{2 (\theta_0 + \theta)}{1000} \right\} ,$$

il est clair que les trois variables x, $\theta_0 + \theta$, h satisferont toujours à l'équation proposée, dans toutes les positions possibles de la coulisse.

Cette règle glissante ne pourra donner l'altitude d'une station que lorsqu'on connaîtra les observations faites simultanément à une station inférieure. Cependant il arrive fort souvent qu'après avoir observé le baromètre et le thermomètre dans un lieu, on désire connaître sur-le-champ la hauteur de cette station au-dessus d'une autre dans laquelle la hauteur seule du baromètre est donnée, sans la température.

Le problème qui se présente ici est le suivant:

Étant données la hauteur du baromètre et la température de l'air à une station, trouver la différence de niveau avec une autre station dont on ne connaît que la hauteur du baromètre.

Pour résoudre ce problème, il est nécessaire d'avoir une autre relation entre les variables x, h_0, h, θ_0, θ. On pourrait supposer connue la relation entre x, θ_0, θ. C'est ce qu'a

fait Bernard de LINDENAU, dans ses Tables barométriques (*), en supposant que la température décroît en proportion des hauteurs.

Mais les observations récentes de M. GLAISHER ont mis hors de doute que le décroissement de la température se ralentit à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère; de sorte qu'on ne saurait avoir grande confiance dans les résultats donnés par cette méthode.

Des recherches qui me sont propres, sur les résultats obtenus par M. GLAISHER, m'ont conduit à admettre que le décroissement de la densité de l'air est proportionnel à la hauteur. C'est en partant de cette loi que j'ai donné une nouvelle formule barométrique.

Si l'on suppose constante la raison a suivant laquelle la densité de l'air décroît en s'élevant dans l'atmosphère, j'ai fait voir (**) qu'on est conduit à l'équation

$$\frac{x}{A}\left(\frac{2-ax}{1-ax}\right) = t\left(\frac{h_0}{h} - 1\right),$$

où les dénominations sont les mêmes que plus haut, et où

$$t = 274° + \theta,$$

$$A = 58,8.$$

Cette équation peut se réduire immédiatement en règle glissante; en effet, si l'on prend les logarithmes de part et d'autre, il vient

$$\log\frac{x}{A}\left(\frac{2-ax}{1-ax}\right) = \log t + \log\left(\frac{h_0}{h} - 1\right).$$

(*) *Tables barométriques pour faciliter le calcul des nivellements et des mesures des hauteurs par le baromètre*, par Bernard de LINDENAU. Gotha, chez R. Z. Becker 1809.

(**) *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, vol. II — décembre 1866.

Il suffit donc de graduer les trois échelles de la règle suivant les lois

$$Z = \log \frac{x}{A}\left(\frac{2 - ax}{1 - ax}\right),$$

$$X = \log t\ ,$$

$$Y = \log\left(\frac{h_0}{h} - 1\right),$$

pour que, dans toutes leurs positions, elles satisfassent à l'équation donnée.

C'est sur ce principe que j'ai imaginé une règle glissante pour calculer les hauteurs mesurées par le baromètre. Cette règle pourrait recevoir le nom de *Rhabdohypsologiste*, ou plus simplement d'*Hypsologiste*.

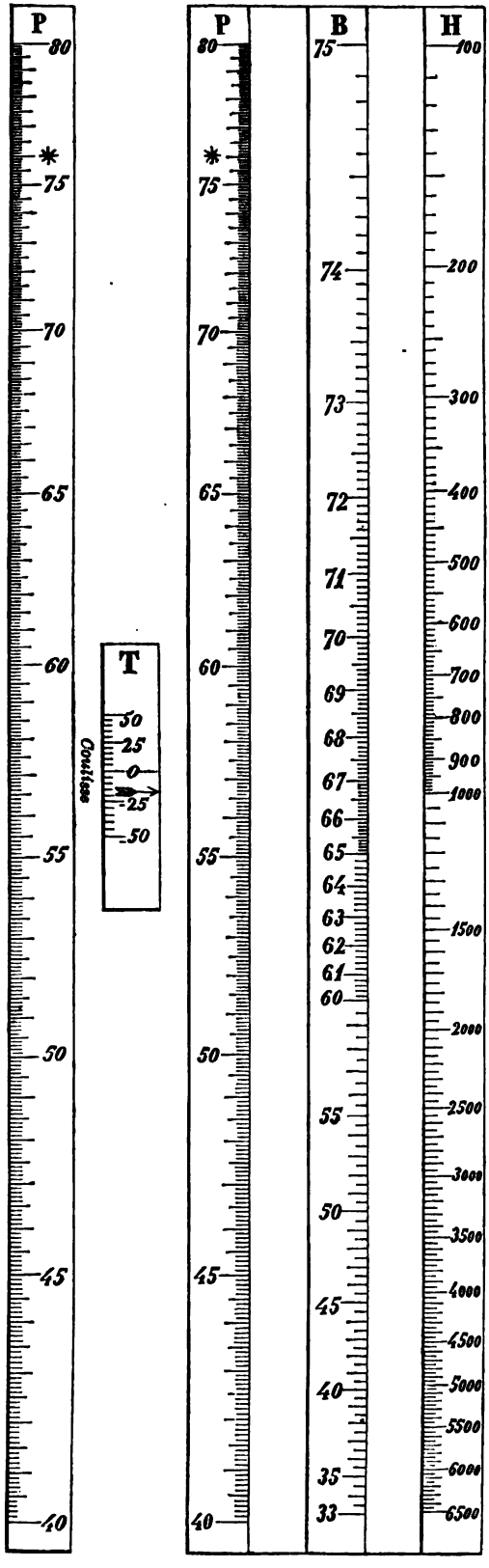
J'en ai fait construire de plusieurs manières. On peut prendre pour arguments x, t et $\frac{h_0}{h}$ ou bien x, t et h, en donnant à h_0 une valeur déterminée.

Dans le second cas, si la hauteur du baromètre à la station inférieure n'est point égale à la valeur déterminée de h_0; mais si elle a, par exemple, une valeur égale à H, l'argument d'entrée au lieu d'être h sera

$$H\,\frac{h}{h_0}\ .$$

Dans le but d'obtenir cette quatrième proportionnelle sans calcul arithmétique, j'ai ajouté deux échelles logarithmiques identiques, au moyen desquelles on trouve sur-le-champ l'argument d'entrée.

On trouvera ci-après le dessin de l'Hypsologiste qu'a construit M. J. Hicks (8, Hatton Garden, London), ainsi que les Tables pour le construire et l'instruction pour s'en servir dont il doit être accompagné.



HYPSOLOGISTE

Table pour construire l'Hypsologiste.

Echelle H.

Valeurs de la fonction $100 \log \frac{1-100\,a}{100\,(2-100\,a)} \cdot \frac{x\,(2-a\,x)}{1-a\,x}$;

$a = 0{,}000\,08$

x	Fonction	Diff.		x	Fonction	Diff.	
	millimètres				millimètres		
100	0			1250	111,86	10,19	
110	4,16	4,16		1500	120,30	8,44	
120	7,95	3,79		1750	127,53	7,23	
130	11,45	3,50		2000	133,88	6,35	
140	14,68	3,23		2250	139,57	5,69	
150	17,70	3,02		2500	144,73	5,16	
160	20,52	2,82		2750	149,49	4,76	Chaque intervalle divisé en 5 parties.
170	23,17	2,65		3000	153,90	4,41	
180	25,67	2,50		3250	158,04	4,14	
190	28,03	2,36		3500	161,95	3,91	
200	30,28	2,25		3750	165,66	3,71	
250	40,06	9,78		4000	169,21	3,55	
300	48,07	8,01	Chaque intervalle divisé en 5 parties.	4250	172,62	3,41	
350	54,85	6,78		4500	175,91	3,29	
400	60,74	5,89		4750	179,10	3,19	
450	65,95	5,21		5000	182,22	3,12	
500	70,62	4,67		5500	188,25	6,03	Chaque intervalle divisé en 10 parties.
600	78,72	8,10	Chaque intervalle divisé en 10 parties.	6000	194,12	5,87	
700	85,60	6,88		6500	199,92	5,80	
800	91,59	5,99					
900	96,90	5,31					
1000	101,67	4,77					

Le coefficient 100 a été choisi de manière à donner à l'échelle la longueur d'environ $0^m, 2$.

Table pour construire l'Hypsologiste.

Echelle T.

Valeurs de la fonction $100 \log \frac{324}{t}$

Thermomètre	Fonction	Différence	
	millimètres		
50°	0		
25°	3,49	3,49	
0°	7,28	3,79	Chaque intervalle divisé en 5 parties.
— 25	11,43	4,15	
— 50	16,03	4,60	

Distance du zéro à la flèche 2^{mm}, 93 du côté des températures négatives.

Table pour construire l'Hypsologiste.

ECHELLE B.

Valeurs de la fonction $100 \log 75 \left(\frac{76 - h}{h}\right)$

h	Fonction	Diff.		h	Fonction	Diff.	
	millimètres				millimètres		
75,0	0			64	114,81	4,46	
74,9	4,20	4,20		63	118,97	4,16	
74,8	8,03	3,83		62	122,88	3,91	
74,7	11,57	3,54		61	126,58	3,70	
74,6	14,85	3,28		60	130,10	3,52	Chaque intervalle divisé en 5 parties.
74,5	17,90	3,05		57,5	138,26	8,16	
74,4	20,76	2,86		55,0	145,69	7,43	
74,3	23,45	2,69		52,5	152,60	6,91	
74,2	25,99	2,54		50,0	159,11	6,51	
74,1	28,40	2,41		47,5	165,32	6,21	
74,0	30,69	2,29		45,0	171,32	6,00	
73,5	40,67	9,98	Chaque intervalle divisé en 5 parties.	42,5	177,17	5,85	
73,0	48,89	8,22		40,0	182,93	5,76	
72,5	55,88	6,99		35,0	194,38	11,45	divisé en 10.
72,0	61,98	6,10		33,0	199,00	4,62	divisé en 4.
71,5	67,40	5,42					
71,0	72,28	4,88					
70	80,81	8,53	Chaque intervalle divisé en 10 parties.				
69	88,13	7,32					
68	94,56	6,43					
67	100,32	5,76					
66	105,55	5,23					
65	110,35	4,80					

Table pour construire l'Hypsologiste.

Echelle P.

Valeurs de la fonction $200 \frac{\log 80 - \log h}{\log 80 - \log 40}$

h	Fonction	Dif.	h	Fonction	Dif.
	millimètres			millimètres	
80	0		59	87,86	4,85
79	3,63	3,63	58	92,79	4,93
78	7,31	3,68	57	97,81	5,02
77	11,03	3,72	56	102,92	5,11
76	14,80	3,77	55	108,12	5,20
75	18,62	3,82	54	113,41	5,29
74	22,49	3,87	53	118,80	5,39
73	26,42	3,93	52	124,30	5,50
72	30,40	3,98	51	129,90	5,60
71	34,44	4,04	50	135,61	5,71
70	38,53	4,09	49	141,44	5,83
69	42,68	4,15	48	147,39	5,95
68	46,89	4,21	47	153,47	6,08
67	51,17	4,28	46	159,68	6,21
66	55,51	4,34	45	166,02	6,34
65	59,92	4,41	44	172,50	6,48
64	64,39	4,47	43	179,13	6,63
63	68,93	4,54	42	185,92	6,79
62	73,55	4,62	41	192,88	6,96
61	78,24	4,69	40	200,00	7,12
60	83,01	4,77			

Le coefficient 200 est tel que l'échelle résulte de $0^m,2$ en longueur.

INSTRUCTION

POUR L'USAGE DE L'HYPSOLOGISTE.

La détermination de la différence de niveau de deux stations, par le baromètre, exige la connaissance des indications simultanées du baromètre et du thermomètre aux deux stations.

Cependant il arrive fort souvent que, faute de deux baromètres ou de deux observateurs, on ne peut avoir les deux observations barométriques et thermométriques simultanées.

Quelquefois, après avoir gravi une montagne, et observé le baromètre et le thermomètre, on serait bien aise de se former une idée de la hauteur à laquelle on se trouve au-dessus du niveau de la mer, sans attendre, pour la calculer, les observations faites à une station inférieure.

D'autres fois connaissant, en outre, à la base de la montagne, la pression de l'air, sans en avoir la température, on pourrait désirer savoir de combien le sommet de la montagne s'élève au-dessus de sa base.

L'hypsologiste donne une réponse à ces questions qui se présentent à tout moment dans les courses alpestres.

Il permet de résoudre mécaniquement les problèmes suivants:

1° Etant données la hauteur barométrique et la température à une station, trouver la hauteur de cette station,

au-dessus du niveau de la mer, en supposant qu'à ce niveau le baromètre marque 76 centimètres;

2° Etant données la hauteur barométrique et la température à une station, et la hauteur barométrique à une autre station, trouver la différence de niveau entre les deux stations;

3° Etant données la différence de niveau entre deux stations et les indications du baromètre et du thermomètre à l'une des stations, réduire la hauteur du baromètre à ce qu'elle serait à l'autre station.

1er Problème.

L'altitude d'une station se trouve au moyen des échelles portant les trois lettres *B*, *T*, *H*, initiales des mots *baromètre*, *thermomètre* et *hauteur*. L'échelle *B* contient la hauteur de la colonne barométrique, exprimée en centimètres; l'échelle *T* représente la température exprimée en degrés du thermomètre centésimal (chaque division équivaut à 5 degrés); enfin l'échelle *H* donne la hauteur en mètres au-dessus d'un plan où le baromètre marquerait 76 centimètres.

En faisant mouvoir la coulisse *T*, on amène le degré du thermomètre en regard de la hauteur du baromètre prise sur l'échelle *B* et on lit la division de l'échelle *H* qui se trouve en face de la flèche tracée sur la coulisse *T*. C'est l'altitude de la station.

Exemple.

Mesure de l'altitude du mont Viso. Une observation faite au sommet, le 12 août 1863, à $2^h\ 30^m$ après midi, a donné

Hauteur du baromètre (ramenée à 0°) $48^{cm},4$
Thermomètre libre . . . . . 6°.

On amène 6 de la coulisse *T* devant 48, 4 de l'échelle *B*, et, en face de la flèche, on lit sur l'échelle *H*, 3850 mètres. C'est l'altitude du mont Viso.

2e Problème.

La différence de niveau entre deux stations s'obtient au moyen de deux opérations successives.

On commence par chercher à l'aide des deux échelles, parfaitement identiques, marquées *P* (initiale du mot *proportion*), l'argument dont on doit faire usage dans l'échelle *B*. A cet effet, en faisant mouvoir la coulisse *P*, on amène la division qui exprime la hauteur du baromètre à la station inférieure en regard de la division 76 centimètres de l'échelle fixe *P*, division marquée d'une étoile pour qu'on la distingue plus facilement. En face de la division de la coulisse exprimant la colonne barométrique à la station supérieure, on trouve sur l'échelle fixe *P* l'argument cherché.

Cela fait, on amène le degré du thermomètre, pris sur la coulisse *T*, devant la hauteur barométrique, trouvée dans l'opération précédente et prise sur l'échelle *B;* la division de l'échelle *H*, en face de laquelle se trouve la flèche tracée sur la coulisse *T*, donne la différence de niveau des deux stations.

Exemple.

Supposons qu'au moment de l'observation faite au sommet du mont Viso, de l'exemple précédent, le baromètre

marque $65^{cm},3$ à Casteldelfino. Pour trouver la hauteur du sommet du mont Viso au-dessus de Casteldelfino, on commence par amener 65,3 de la coulisse *P* devant 76 de l'échelle fixe *P*; en face de 48,4 de la coulisse, on trouve sur l'échelle fixe 56,3. C'est la hauteur barométrique dont on doit faire usage dans l'échelle *B*.

On se sert maintenant des échelles *B*, *T*, *H*. On amène la division 6 de l'échelle *T* devant la division 56,3 de l'échelle *B*; en face de la flèche on trouve sur l'échelle *H* le nombre 2555^{m}. C'est la différence de niveau entre le sommet du mont Viso et Casteldelfino.

3e Problème.

Pour réduire la hauteur du baromètre au niveau d'une autre station, on commence par amener la flèche de la coulisse *T* en regard de la différence de niveau des deux stations, prise sur l'échelle *H*, et on lit sur l'échelle *B*, la division qui se trouve en face de la température. Ensuite on amène la hauteur barométrique donnée, prise sur la coulisse *P*, en regard de la hauteur barométrique trouvée ci-dessus, prise sur l'échelle fixe *P*. En face de 76, pris sur l'échelle fixe *P*, on lit sur la coulisse *P* la hauteur barométrique cherchée.

Exemple.

A l'altitude de 550 mètres, la température de l'air étant 16°, un baromètre marque 71 centimètres; il s'agit de savoir quelle serait la hauteur du baromètre, au même instant, à une station dont l'altitude est de 200^{m}.

On amène la flèche de la coulisse *T* en regard de 350,

différence de niveau des deux stations, et, en face de la division 16 de la coulisse, on lit sur l'échelle *B* le nombre 72,96. Ensuite on amène 71, pris sur la coulisse *P*, devant 72,96 de l'échelle fixe *P*; en face de 76 de l'échelle fixe on trouve sur la coulisse $73^{cm},96$. C'est la hauteur cherchée du baromètre.

L'un des côtés de la règle est divisé en centimètres et millimètres; les divisions du fond de la rainure dans laquelle glisse la coulisse *P*, font suite à celles du côté. On a ainsi une mesure linéaire double en longueur de celle de la règle et qui se lit directement à l'extrémité de la coulisse.

Sur le revers de la règle est gravée une table des altitudes inférieures à 100 mètres qui n'ont pu être comprises dans les échelles de la face supérieure, faute d'espace.

On trouve aussi sur le revers de la règle une petite table des tangentes des angles, qui peut, dans certaines circonstances, être utile aux touristes.

Chacun pourra du reste y inscrire les données que sa spécialité réclame le plus souvent.

NOUVELLES TABLES HYPSOMÉTRIQUES.

NOUVELLES TABLES HYPSOMÉTRIQUES.

NOUVELLES TABLES HYPSOMÉTRIQUES.

(Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, serie II, vol. XXV).

J'ai signalé depuis 1864, dans trois Mémoires, dont j'ai fait hommage l'année passée à l'Académie, l'incompatibilité de la formule hypsométrique de LAPLACE avec le décroissement de la température, directement observé dans les ascensions aérostatiques. J'ai proposé une formule barométrique qui tient compte du décroissement de la température, de la présence de la vapeur aqueuse dans l'air, et des variations de la pesanteur, tant en hauteur qu'en latitude.

Bien que cette formule soit très-simple et n'exige que peu d'opérations, cependant lorsqu'on a une série d'observations barométriques à calculer, on sent le besoin de tables pour abréger le travail. Ce sont ces tables que je me suis proposé de dresser, et que je soumets aujourd'hui à l'Académie ; mais avant d'en parler, je demande la permission de faire voir avec quelle facilité on arrive à ma formule.

Le poids de la colonne d'air comprise entre deux stations est évidemment égal à la différence des deux pressions accusées par le baromètre aux mêmes stations. D'un

autre côté, le poids de la colonne d'air est égal à la surface de sa base, que nous supposerons égale à l'unité, multipliée par la hauteur et par la moyenne arithmétique, entre les diverses valeurs, en nombre infini, que le poids spécifique de l'air acquiert dans toute l'étendue de la colonne.

Il en résulte, que la hauteur d'un lieu au-dessus d'un autre est égale à la différence des pressions indiquées par les baromètres observés simultanément dans les deux lieux, divisée par le poids spécifique moyen de l'air compris entre ces mêmes stations.

La valeur de cette moyenne dépend naturellement de la manière dont la densité varie avec la hauteur: et l'on ne peut la déterminer sans connaître la loi de décroissement de la densité, ou bien la loi de décroissement de la température; car une de ces lois étant donnée, l'autre s'en déduit par l'analyse mathématique.

En étudiant de près les résultats obtenus par M. Glaisher dans ses nombreuses ascensions aérostatiques, je me suis aperçu qu'à mesure qu'on s'élève dans l'atmosphère la densité de l'air décroît à peu près en progression arithmétique.

Cette loi de décroissement avait été employée depuis longtemps pour calculer les réfractions astronomiques; mais elle n'avait été ni confirmée par des observations directes des densités des couches successives de l'atmosphère, ni employée, que je sache, pour calculer les hauteurs au moyen des observations barométriques.

Cette loi de décroissement étant admise, il s'ensuit sur-le-champ que la moyenne entre toutes les densités qui correspondent aux différents points de la colonne atmosphérique, comprise entre les deux stations, est égale à la demi-somme des deux densités extrêmes.

Ainsi la différence de niveau x entre deux stations sera exprimée par

$$x = \frac{2}{g_1}\left(\frac{p_0 - p}{\rho_0 + \rho}\right),$$

où p_0, p désignent les pressions de l'air sur l'unité de surface à la station inférieure et à la station supérieure; ρ_0, ρ, les densités de l'air aux mêmes stations; g_1, la pesanteur moyenne pour les différents points de la colonne d'air qui sépare les deux stations.

Les densités ρ_0, ρ sont données par les indications réunies du baromètre, du thermomètre et de l'hygromètre aux deux stations. On les en déduit par la formule connue

$$\rho = \frac{p - m\varpi}{ct},$$

où ϖ désigne la pression de la vapeur aqueuse contenue dans l'air, et qui sera donnée par l'hygromètre; $1 - m$, le rapport entre le poids de la vapeur et celui de l'air sec, à pression et à température égales (suivant GAY-LUSSAC $m = \frac{3}{8}$); t, la température absolue de l'air, comptée à partir du zéro absolu (— 274° C.); c, un coefficient constant.

Nous aurons en conséquence, pour la formule barométrique,

$$x = \frac{2c}{g_1}\left(\frac{p_0 - p}{\frac{p_0 - m\varpi_0}{t_0} + \frac{p - m\varpi}{t}}\right).$$

Les pressions p_0 et p sont mesurées par la hauteur de la colonne de mercure du baromètre aux deux stations. Si h_0 et h désignent ces deux hauteurs réduites à la

température de la glace fondante, g_0 et g, les pesanteurs aux deux stations, Δ la densité du mercure, nous aurons

$$p_0 = g_0 \Delta h_0 , \qquad p = g \Delta h .$$

Si, en outre, nous posons

$$\varpi_0 = g_2 \Delta \eta_0 , \qquad \varpi = g_2 \Delta \eta ,$$

η_0 et η désigneront les forces élastiques de la vapeur, exprimées en colonne de mercure dans un lieu où la pesanteur est g_2; ce sera le lieu où les expériences de physique, nécessaires pour déterminer la longueur de la colonne de mercure correspondante à un état hygrométrique donné, ont été exécutées.

En substituant ces valeurs, on obtient

$$x = \frac{2c}{g_1}\left(\frac{h_0 - h\frac{g}{g_0}}{\frac{h_0 - m\eta_0\frac{g_2}{g_0}}{t_0} + \frac{h\frac{g}{g_0} - m\eta\frac{g_2}{g_0}}{t}}\right).$$

La constante c est déterminée dès qu'on connaît la densité de l'air qui correspond à une température et sous une pression données, dans un lieu donné. M. Regnault a trouvé qu'à la température de la glace fondante, et sous la pression de $0^m,76$, le rapport du poids du mercure à celui de l'air sec est de 10517,3 à 1, au niveau de la mer et à la latitude de 45°.

En substituant cette donnée expérimentale dans l'expression

$$c = \frac{p}{\rho t} = \frac{G\Delta h}{\rho t} ,$$

on obtient

$$c = (10517{,}3)\,\frac{0{,}76}{274}\,G\ ,$$

G étant la pesanteur au niveau de la mer et à la latitude de 45°.

D'après cela, la formule barométrique devient

$$x = (105{,}173)\,\frac{G}{g_1}\cdot\frac{h_0 - h\,\dfrac{g}{g_0}}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{274}{76}\left(\dfrac{h_0 - m\,\eta_0\,\dfrac{g_2}{g_0}}{t_0} + \dfrac{h\,\dfrac{g}{g_0} - m\eta\,\dfrac{g_2}{g_0}}{t}\right)}\ .$$

Les diverses pesanteurs G, g_0, g_1, g_2 ne répondent pas à la même verticale. Nous commencerons par les réduire toutes à la même latitude. Soit λ la latitude du lieu de l'observation, ou la latitude moyenne des deux stations, si elles ne sont point sur le même parallèle ; G_0 la pesanteur au niveau de la mer à cette latitude. On sait qu'il existe la relation

$$G_0 = G\,(1 - 0{,}0026\cos 2\lambda),$$

entre la pesanteur G_0 et la pesanteur G à 45° de latitude ; d'où l'on tire

$$G = G_0\,(1 + 0{,}0026\cos 2\lambda),$$

en développant en série, et en se bornant au premier terme qui est le seul sensible. On aura alors

$$x = (105{,}173)\,(1 + 0{,}0026\cos 2\lambda)\,\frac{G_0}{g_1} \times \frac{h_0 - h\,\dfrac{g}{g_0}}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{274}{76}\left(\dfrac{h_0 - m\eta_0\,\dfrac{g_2}{g_0}}{t_0} + \dfrac{h\,\dfrac{g}{g_0} - m\eta\,\dfrac{g_2}{g_0}}{t}\right)}\ ,$$

où toutes les pesanteurs répondent à la même latitude.

Pour déterminer les rapports

$$\frac{G_0}{g_1}, \qquad \frac{g}{g_0}, \qquad \frac{g_2}{g_0}$$

des diverses pesanteurs, nous devons distinguer deux cas: ou les deux stations sont dans les espaces atmosphériques, comme dans une ascension aérostatique; ou elles sont à la surface de la terre.

Dans le premier cas, la pesanteur diminue en raison du carré de la distance au centre de la terre; dans le second, la diminution est moins rapide, à cause de l'attraction des couches de terrain comprises entre le niveau des mers et les points où se font les observations.

Dans le premier cas, en désignant par r, r_0, r_1, r_2, R_0 les distances au centre de la terre des lieux où les pesanteurs sont respectivement g, g_0, g_1, g_2, G_0, on a

$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \qquad \frac{g_2}{g_0} = \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^2, \qquad \frac{G_0}{g_1} = \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2.$$

Si l'on désigne par X la hauteur de la station inférieure au-dessus du niveau de la mer, on aura

$$r_0 = R_0 + X,$$

et

$$r = r_0 + x = R_0 + X + x,$$

car x est la différence de niveau des deux stations. D'après cela, on aura

$$\frac{g}{g_0} = 1 - 2\,\frac{x}{R_0},$$

en négligeant

$$\left(\frac{x}{R_0}\right)^2, \qquad \frac{xX}{R_0^2}, \quad \text{etc.}$$

Dans le même ordre d'approximation, on pourra prendre pour la pesanteur moyenne de la colonne d'air entre les deux stations, la pesanteur qui répond au milieu de la hauteur x. On aura ainsi

$$r_1 = R_0 + X + \frac{1}{2}x,$$

et par suite

$$\frac{G_0}{g_1} = 1 + 2\frac{X}{R_0} + \frac{x}{R_0},$$

en négligeant les carrés de

$$\frac{X}{R_0}, \qquad \frac{x}{R_0}$$

et leurs produits.

Les quantités

$$m\eta_0, \qquad m\eta$$

sont toujours fort petites en comparaison de h_0 et de h; ainsi on pourra supposer sans erreur sensible que le rapport

$$\frac{g_2}{g_0},$$

par lequel elles sont multipliées, est égal à l'unité.

Lorsque les deux stations sont à la surface de la Terre, on doit, suivant Poisson (*), remplacer $2\frac{x}{R_0}$ par $\frac{5}{4}\frac{x}{R_0}$ pour avoir égard à l'action de la couche terrestre dont la hauteur est x.

(*) Méc., t. 1, pag. 495.

D'après tout cela, la formule définitive pour la mesure des hauteurs, par les observations du baromètre, sera

$$x = (105{,}173)\,(1 + 0{,}0026\cos 2\lambda)\left(1 + \frac{a}{2}\frac{x}{R_0} + a\frac{X}{R_0}\right) \times \frac{h_0 - h\left(1 - a\frac{x}{R_0}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{274}{76}\left\{\frac{h_0 - \frac{3}{8}\eta_0}{t_0} + \frac{h\left(1 - a\frac{x}{R_0}\right) - \frac{3}{8}\eta}{t}\right\}},$$

dans laquelle λ désigne la latitude moyenne des deux stations; h et t, la hauteur barométrique en centimètres et la température absolue (au dessus de — 274°) en degrés du thermomètre centigrade, à la station supérieure; h_0 et t_0, les quantités analogues à la station inférieure; R_0, le rayon terrestre, qu'on peut ici regarder comme étant le même à toutes les latitudes, et égal à 6366800 mètres. On prendra

$$a = 2,$$

lorsqu'il s'agira de mesurer les hauteurs dans un voyage aérostatique, et

$$a = \frac{5}{4}$$

lorsque les deux stations seront à la surface de la terre.

Cette équation contenant x dans ses deux membres n'est pas complétement résolue; mais on remarquera que les x, qui se trouvent dans le second membre, y sont divisés par le rayon de la terre, qui est toujours extrêmement grand par rapport à x. On n'a donc pas besoin, pour calculer ces termes, de connaître x bien exactement, mais seulement à peu près. On calculera d'abord x en négligeant ces termes,

puis on se servira de cette valeur pour les calculer à leur tour, et on obtiendra ainsi une seconde valeur de x plus approchée que la première. On pourrait continuer de la sorte ces approximations successives; mais il suffit de s'arrêter à la seconde valeur.

Cette formule hypsométrique peut être réduite en tables de différentes manières. Voici la manière à laquelle je me suis arrêté.

Avant tout, il est nécessaire d'avoir une table pour la réduction de la colonne du baromètre à la température de la glace fondante.

La table I est destinée à cet usage. Elle est calculée sur la formule

$$h = H - (0,0001614)\, HT,$$

où H désigne la hauteur observée sur une échelle en laiton à la température T, comptée de la glace fondante.

La table I donne le second terme de la formule. La correction doit être *soustraite* de la hauteur H observée, quand la température est *au-dessus* de zéro ; elle doit y être *ajoutée* quand la température est *au-dessous* de zéro.

Si maintenant nous posons

$$x' = 105,173\ (h_0 - h),$$

x' exprimera une première valeur de la hauteur cherchée; c'est la hauteur d'une colonne d'air d'un poids égal à celui de la colonne qui sépare les deux stations, ayant partout une même densité, égale à la densité de l'air à 0°, sous la pression de $0^m,76$, au niveau de la mer et à 45° de latitude.

La table II fournit les valeurs de x' pour toutes les

valeurs de $h_0 - h$ croissantes de décimillimètre en décimillimètre, depuis 0^m jusqu'à $0^m,9999$.

Posons

$$\delta = \frac{274}{76}\left(\frac{h - \frac{3}{8}\eta}{t}\right);$$

ce sera la densité de l'air sous la pression h, à la température absolue t, contenant η de vapeur aqueuse, rapportée à la densité de l'air à 0° et sous $0^m,76$.

D'après cela, nous aurons pour seconde valeur approchée

$$x'' = \frac{x'}{\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta)}.$$

La table V contient les diverses valeurs de δ pour des pressions croissantes depuis $0^m,20$ à $0^m,80$, et des températures entre — 20° et 40° du thermomètre centigrade.

Mais comme la pression avec laquelle on doit entrer dans cette table est égale à la pression barométrique moins les $\frac{3}{8}$ de la pression due à la vapeur aqueuse, il a fallu ajouter deux autres tables pour déduire cette pression des indications de l'hygromètre.

La table III donne les $\frac{3}{8}$ de la force élastique de la vapeur d'eau, exprimée en colonne de mercure, pour chaque degré du thermomètre centigrade, depuis — 20° jusqu'à + 40°.

Si l'on emploie, pour déterminer la quantité de vapeur aqueuse contenue dans l'air, un hygromètre donnant le point de rosée, la table III fournira immédiatement la valeur de $\frac{3}{8}\eta$.

Mais nous croyons que, dans l'état actuel de l'hygrométrie, le seul instrument pratique dans les voyages c'est le thermomètre mouillé, malgré le peu d'exactitude qu'on

lui reproche. Il n'est pas même besoin d'avoir un psychromètre. Un simple thermomètre qu'on observe successivement avec la boule sèche et avec la boule mouillée, remplace avantageusement tout appareil hygrométrique.

Afin de se placer autant que possible dans les mêmes circonstances, je conseillerai de faire tourner le thermomètre en fronde, après en avoir enveloppé la boule avec de la toile, et de comparer entre elles les deux observations faites avec la toile sèche et avec la toile mouillée.

Les indications du thermomètre sec et humide étant ainsi connues, on entre d'abord avec la température du thermomètre humide dans la table III, et on y trouve les $\frac{3}{8}$ de la force élastique correspondante de la vapeur, qu'on soustrait de la hauteur h du baromètre, réduite à la température de la glace fondante.

Ensuite avec les arguments : hauteur du baromètre et différence des deux indications du thermomètre sec et humide, on trouve dans la table IV le nombre qu'il faut ajouter au résultat ci-dessus pour avoir la quantité cherchée

$$h - \frac{3}{8}\eta .$$

On obtiendra ainsi les éléments nécessaires pour le calcul des deux densités δ_0, δ, au moyen desquelles on déterminera x''.

Ayant obtenu la seconde valeur approchée x'' de la différence de niveau, il restera à lui faire subir les corrections relatives aux variations de la pesanteur dans la verticale et en latitude.

L'effet de la diminution de la pesanteur sur le mercure du baromètre nous oblige à changer h en

$$h\left(1 - a\frac{x}{R_0}\right).$$

Cela revient à augmenter x'' de la hauteur due à la différence

$$a \frac{x}{R_0} h$$

dans la colonne barométrique.

La densité de l'air à la station supérieure est δ, et peut être regardée comme constante dans toute l'étendue très-petite de la colonne d'air qui correspond à la hauteur barométrique

$$a \frac{x}{R_0} h .$$

De la sorte, la hauteur de cette colonne d'air sera

$$\frac{(105{,}173)\, a h \frac{x}{R_0}}{\delta},$$

ou bien, en remplaçant δ par sa valeur,

$$\frac{(105{,}173)\, a h \frac{x}{R_0}}{\frac{274}{76}\left(\frac{h - \frac{3}{8}\eta}{t}\right)} = (105{,}173)\left(\frac{76}{274}\right) a t \frac{x}{R_0},$$

et en négligeant le produit de $\frac{x}{R_0}$ par

$$\frac{\eta}{h}$$

et par ses puissances supérieures. On pourra remplacer, dans cette formule, x par x'' avec une approximation très-suffisante.

En ajoutant la correction due au terme

$$\frac{a}{2}\frac{x\,x''}{R_0},$$

provenant de la diminution de la pesanteur de l'air suivant la hauteur, auquel on peut donner la forme

$$\frac{a}{2}\frac{x''^2}{R_0},$$

en remplaçant, comme ci-dessus, x par x'', on aura, pour calculer les effets produits par la diminution de la pesanteur entre les deux stations, l'expression

$$A = (105{,}173)\left(\frac{76}{274}\right) a\,\frac{t\,x''}{R_0} + \frac{a}{2}\frac{x''^2}{R_0},$$

ou bien

$$A = (0{,}000\,005\,73)\,t\,x'' + (0{,}000\,000\,098)\,x''^2,$$

en prenant

$$a = \frac{5}{4}, \qquad R_0 = 6\,366\,800^{m}.$$

La table VI donne la correction A pour toutes les valeurs de x'' de 100 en 100 mètres, depuis 0^{m} jusqu'à 10000^{m} et de t de 10 en 10 degrés, depuis $-20°$ jusqu'à $40°$.

Le terme

$$a\,\frac{x''\,X}{R_0}$$

donne la petite correction due à la hauteur X de la station inférieure au-dessus de la mer. En la désignant par B, on aura

$$B = 0{,}000\,000\,196\,x''\,X.$$

La table VII donne cette correction calculée de 1000 en 1000 mètres, pour les valeurs de x'' et de X, depuis 0^m jusqu'à 9000^m.

Si l'altitude X de la station inférieure est inconnue, on la détermine, avec une approximation très-suffisante, au moyen de la petite table placée au bas de la table VII.

Enfin la table VIII donne la correction

$$C = (0,0026)\, x'' \cos 2\lambda ,$$

relative à la variation de la pesanteur en latitude.

Cette correction est positive, quand la latitude moyenne des deux stations est comprise entre l'équateur et le parallèle de 45°; et négative, quand la latitude moyenne est comprise entre ce parallèle et le pôle.

La différence de niveau cherchée est donnée de la sorte par

$$x = x'' + A + B + C.$$

Les tables VI, VII, VIII fournissent directement les corrections A, B, C; la hauteur approchée x'' s'obtient en divisant la hauteur x' donnée au moyen de la table II, par la demi-somme des densités de l'air aux deux stations, données par la table V.

Avant de terminer, il me reste à remercier mes confrères et amis, MM. G. Govi et B. Gastaldi, de l'aide qu'ils m'ont prêtée dans le calcul assez laborieux de la table V. Sans leur collaboration et celle du Baron Rodini, major d'Artillerie, et du jeune Avocat Louis Pulciano, auquel je suis aussi redevable de la table VI, je n'aurais pu donner autant d'extension aux tables V et VI. Je me plais à leur adresser ici un affectueux témoignage de reconnaissance.

USAGE DES TABLES.

Pour calculer, au moyen des tables, une différence de niveau d'après deux observations barométriques, on procède de la manière suivante.

On ramène d'abord les deux colonnes barométriques à la température de la glace fondante à l'aide de la table I.

Avec la différence $h_0 - h$ des deux colonnes à zéro, on cherche dans la table II la première valeur

$$x' = 105{,}173\ (h_0 - h)$$

de la différence de niveau correspondante.

On détermine la quantité $h - \frac{3}{8}\eta$ pour chaque station, en retranchant de la hauteur barométrique à zéro le nombre fourni par la table III, et en ajoutant le nombre donné par la table IV.

Avec les arguments $h - \frac{3}{8}\eta$ et la température de l'air, on cherche, dans la table V, la densité de l'air à chaque station.

La différence de niveau x' trouvée plus haut, divisée par la demi-somme des deux densités de l'air, donnera une seconde valeur approchée

$$x'' = \frac{x'}{\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta)}.$$

A l'aide des tables VI, VII, VIII, on cherche les corrections A, B, C, et la différence de niveau définitive sera

$$x = x'' + A + B + C.$$

Exemple.

Pour donner un exemple de l'usage des tables, je prendrai les observations faites par M. Bauernfeind, sur le grand Miesing, en Bavière, à deux stations dont la différence de hauteur avait été déterminée avec soin à l'aide du niveau (*).

Hauteur de la station infér. au-dessus de la mer $X = 815^{m},36$
Latitude moyenne des deux stations $\lambda = 47° 40'$
Hauteurs barométriq.: station infér. $693^{mm},51$; sup. $609^{m},3$
Température du mercure: stat. infér. 15°, 63; sup. 7°, 13
Température de l'air: station infér. 13 , 63; sup. 6 ,13
Thermomètre humide: station infér. 12; sup. 6

Table I.

Au moyen de la table I, on commence par réduire à la température de la glace fondante les hauteurs des deux colonnes barométriques.

Station inférieure.

Hauteur barométrique observée		$693^{mm},51$
Température du baromètre . .	15°, 63	
Pour 10°	$1^{mm},110$	
5	0, 557	
0,6	0, 067	
0,03	0, 003	
Somme . . .	1, 737	
Correction soustractive		— 1, 74
Baromètre à zéro		691, 77

(*) Voyez: *Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Veränderungen der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre von* Dr Carl Maximilian Bauernfeind. *München 1862.*

Station supérieure.

Hauteur barométrique observée		609mm,3
Température du baromètre . .	7°, 13	
Pour 7°	0mm,689	
0,1	0, 010	
0,03	0, 003	
Somme . . .	0, 702	
Correction soustractive		— 0, 7
Baromètre à zéro		608, 6

TABLE II.

Cette table donne la première valeur de la différence de niveau des deux stations, d'après la différence des hauteurs barométriques réduites à zéro.

Station inférieure	691mm,77	
Id. supérieure	608, 60	
Différence des hauteurs barométriques	83, 17	
Pour 8 centimètres	841mm,4	
» 31 décimillimètres	32, 6	
» 0,7	0, 7	

Première valeur de la différence de niveau $x' = 874, 7$

TABLE III.

Cette table fournit les $^3/_8$ de la force élastique de la vapeur, qui correspond à la température indiquée par le thermomètre mouillé.

Station inférieure.

12° correspondent à	3mm,92
En les retranchant de	691, 77
il reste . . .	687, 85

Station supérieure.

6° correspondent à	2mm,62
En les retranchant de	608, 60
il reste . . .	605, 98

TABLE IV.

Station inférieure.

Thermomètre sec	13°, 63
Id. humide	12
Différence	1, 63
Avec l'argument . . . 690mm	
la table donne pour 1°	0mm,21
0,6	0, 124
0,03	0, 006
Somme . . .	0, 34
à ajouter à	687, 85
$h_0 - \frac{3}{8}\eta_0 =$	688, 19

Station supérieure.

Thermomètre sec	6°, 13
Id. humide	6
Différence	0, 13
Avec l'argument . . . 610^{mm}	
la table donne pour 0,1	0^{mm},018
0,03	0, 006
Somme . . .	0, 024
à ajouter à	605, 98
$h - \frac{3}{8}\eta =$	606, 00

TABLE V.

Station inférieure.

Arguments : 688^{mm},19 ; 13°,63

Pour 68 centim. et 13°			0,8542
à ajouter	pour 0^{cm},819	0,819 × 0,0126 =	0,01032
			0,86452
à retrancher	pour 0°, 63	0, 63 × 0,0030 =	0,00189
Densité de l'air . . .			0,86263

Station supérieure.

Arguments : 606^{mm} ; 6°,13

Pour 60 centim. et 6°			0,7726
à ajouter . . .	pour 0^{cm},6	0,6 × 0,0129 =	0,00774
			0,78034
à retrancher . .	pour 0°, 13	0,13 × 0,0028 =	0,00036
Densité de l'air . . .			0,77998

Ayant ainsi la densité de l'air aux deux stations, on divisera la première valeur

$$x' = 874,7$$

de la différence de niveau trouvée plus haut, par la demi-somme de ces densités, et l'on obtiendra, pour la seconde valeur approchée de la différence de niveau,

$$x'' = \frac{874,7}{0,8213} = 1065^{m},02 .$$

Il nous reste à faire subir à ce résultat les corrections relatives à la diminution de la pesanteur dans le sens vertical, et à la variation de cette même force en latitude. Ce qu'on fera à l'aide des tables VI, VII, VIII.

Table VI.

On entre dans cette table avec la hauteur approchée 1065^{m} et la température de l'air 6°,13 à la station supérieure, et l'on trouve la correction relative à la diminution de la pesanteur dans la verticale entre les deux stations.

On trouve dans la table, en face de la double

entrée	$\left\{ \begin{matrix} 1000^{m} \\ 0° \end{matrix} \right\}$		$1^{m},7$
à ajouter pour . .	65^{m}	$0,65 \times 0,1$	0,065
id. pour . .	6°,13	$0,613 \times 0,1$	0,061
Correction . . .		$A =$	1,826

TABLE VII.

On y entre avec la différence de niveau approchée 1065^m et l'altitude 815^m de la station inférieure.

	Pour	1000^m / 1000		0^m,2
à ajouter	pour . . .	65^m	0, 65 × 0,2	0, 013
				0, 213
à retrancher	pour . . .	185^m	0,185 × 0,2	0, 037
			Correction . . .	$B = 0, 176$

TABLE VIII.

On y entre avec la hauteur approchée 1065^m et la latitude 47° 40′.

	Pour	1000^m / 45°		0^m
à ajouter	pour	2° 40′	2,67 × 0,1	0, 267
			Correction . . .	$C = 0^m,267$

Par conséquent, la différence de niveau corrigée sera

$$1065,02 + 1,826 + 0,176 - 0,267 = 1066^m,755.$$

En ajoutant la hauteur de la station inférieure, savoir 815^m,36, on trouve enfin 1882^m,1, pour l'altitude de la station supérieure, en s'arrêtant aux décimètres.

M. BAUERNFEIND a trouvé par un nivellement direct 1883^m,5,

pour l'altitude de la station supérieure; résultat plus grand de $1^m,4$ que celui que donnent nos tables. Cette différence rentre dans la limite des erreurs de l'observation.

Les tables barométriques de M. BAUERNFEIND donnent $1882^m,66$. Les tables de M. PLANTAMOUR, calculées sur la formule de BESSEL, donnent $1882^m,72$.

Je ferai remarquer que si, dans mes tables, au lieu du coefficient

$$a = \frac{5}{4},$$

on prenait le cofficient

$$a = 2,$$

qui est adopté dans les tables de MM. BAUERNFEIND et PLANTAMOUR, la correction relative à la diminution de la pesanteur, dans le sens vertical, devrait être augmentée de 0,6 de sa valeur, ou de

$$1^m,2;$$

de la sorte la différence de niveau cherchée deviendrait $1883^m,3$. Ce résultat se rapprocherait de la mesure directe plus que ne s'en rapprochent les résultats fournis par les tables de MM. BAUERNFEIND et PLANTAMOUR.

Sans attribuer trop d'importance à cet accord, on peut en conclure cependant que la formule que j'ai établie donne des résultats aussi exacts qu'on peut l'espérer de la méthode barométrique.

Les tables barométriques de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, construites sur la formule de LAPLACE, donnent une altitude de $1878^m,7$, c'est-à-dire $4^m,8$ en moins que l'altitude obtenue par le nivellement direct.

Ce résultat paraît être en contradiction avec ce que nous avons avancé au commencement, savoir que la formule de LAPLACE, fournit des hauteurs trop grandes. Mais on doit remarquer que le coefficient 18336, dont on s'est servi pour construire ces tables, n'est pas celui qui résulte de la vraie densité de l'air. Si l'on adopte la densité trouvée par M. REGNAULT, et que nous avons employée, ce coefficient devient 18405; alors la hauteur résulte de 1885^{m},8, c'est-à-dire de 2^{m},3 en excès.

L'effet de l'introduction du coefficient empirique 18336, au lieu de 18405, dans la formule de LAPLACE, est d'en abaisser les résultats de manière à lui faire donner des hauteurs trop faibles en deçà d'une certaine limite. Mais au delà, les hauteurs restent encore trop fortes malgré la correction. C'est aux grandes hauteurs qu'on s'aperçoit du défaut de cette formule, et de toutes celles qui supposent implicitement que la diminution de la température, dans l'atmosphère, devient de plus en plus rapide à mesure qu'on s'élève.

TABLES.

Réduction de la colonne barométri

Dilatation de la colonne merc

H	Températ			
	1°	2°	3°	4°
millim.	millim.	millim.	millim.	mill
200	0.032	0.065	0.097	0.12
210	0.034	0.068	0.102	0.13
220	0.036	0.071	0.107	0.14
230	0.037	0.074	0.111	0.14
240	0.039	0.077	0.116	0.15
250	0.040	0.081	0.121	0.16
260	0.042	0.084	0.126	0.16
270	0.044	0.087	0.131	0.17
280	0.045	0.090	0.136	0.18
290	0.047	0.094	0.140	0.18
300	0.048	0.097	0.145	0.19
310	0.050	0.100	0.150	0.20
320	0.052	0.103	0.155	0.20
330	0.053	0.106	0.160	0.21
340	0.055	0.110	0.165	0.21
350	0.056	0.113	0.169	0.22
360	0.058	0.116	0.174	0.23
370	0.060	0.119	0.179	0.23
380	0.061	0.123	0.184	0.24
390	0.063	0.126	0.189	0.25
400	0.065	0.129	0.194	0.25
410	0.066	0.132	0.198	0.26
420	0.068	0.136	0.203	0.27
430	0.069	0.139	0.208	0.27
440	0.071	0.142	0.213	0.28
450	0.073	0.145	0.218	0.29
460	0.074	0.148	0.223	0.29
470	0.076	0.152	0.228	0.30
480	0.077	0.155	0.232	0.31
490	0.079	0.158	0.237	0.31

a température de la glace fondante.

.0001614) HT, l'échelle étant en laiton.

ıtigrade T				
5°	6°	7°	8°	9°
millim.	millim.	millim.	millim.	millim.
0.161	0.194	0.226	0.258	0.291
0.169	0.203	0.237	0·271	0.305
0.178	0.213	0.249	0.284	0.320
0.186	0.223	0.260	0.297	0.334
0.194	0.232	0.271	0.310	0.349
0.202	0.242	0.282	0.323	0.363
0.210	0.252	0.294	0.336	0.378
0.218	0.261	0.305	0.349	0.392
0.226	0.271	0.316	0.362	0.407
0.234	0.281	0.328	0.374	0.421
0.242	0.291	0.339	0.387	0.436
0.250	0.300	0.350	0.400	0.450
0.258	0.310	0.362	0.413	0.465
0.266	0.320	0.373	0.426	0.479
0.274	0.329	0.384	0.439	0.494
0.282	0.339	0.395	0.452	0.508
0.290	0.349	0.407	0.465	0.523
0.299	0.358	0.418	0.478	0.537
0.307	0.368	0.429	0.491	0.552
0.315	0.378	0.441	0.504	0.566
0.323	0.387	0.452	0.516	0.581
0.331	0.397	0.463	0.529	0.596
0.339	0.407	0.474	0.542	0.610
0.347	0.416	0.486	0.555	0.625
0.355	0.426	0.497	0.568	0.639
0.363	0.436	0.508	0.581	0.654
0.371	0.445	0.520	0.594	0.668
0.379	0.455	0.531	0.607	0.683
0.387	0.465	0.542	0.620	0.697
0.395	0.474	0.554	0.633	0.712

TABLE

H	Température			
	1°	2°	3°	4°
millim.	millim.	millim.	millim.	millim.
500	0.081	0.161	0.242	0.323
510	0.082	0.165	0.247	0.329
520	0.084	0.168	0.252	0.336
530	0.086	0.171	0.257	0.342
540	0.087	0.174	0.261	0.349
550	0.089	0.178	0.266	0.355
560	0.090	0.181	0.271	0.362
570	0.092	0.184	0.276	0.368
580	0.094	0.187	0.281	0.374
590	0.095	0.190	0.286	0.381
600	0.097	0.194	0.291	0.387
610	0.098	0.197	0.295	0.394
620	0.100	0.200	0.300	0.400
630	0.102	0.203	0.305	0.407
640	0.103	0.207	0.310	0.413
650	0.105	0.210	0.315	0.420
660	0.107	0.213	0.320	0.426
670	0.108	0.216	0.324	0.433
680	0.110	0.220	0.329	0.439
690	0.111	0.223	0.334	0.445
700	0.113	0.226	0.339	0.452
710	0.115	0.229	0.344	0.458
720	0.116	0.232	0.349	0.465
730	0.118	0.236	0.353	0.471
740	0.119	0.239	0.358	0.478
750	0.121	0.242	0.363	0.484
760	0.123	0.245	0.368	0.491
770	0.124	0.249	0.373	0.497
780	0.126	0.252	0.378	0.504
790	0.128	0.255	0.383	0.510

. — *(Suite).*

ntigrade T				
5°	6°	7°	8°	9°
millim.	millim.	millim.	millim.	millim.
0.403	0.484	0.565	0.646	0.726
0.412	0.494	0.576	0.658	0.741
0.420	0.504	0.587	0.671	0.755
0.428	0.513	0.599	0.684	0.770
0.436	0.523	0.610	0.697	0.784
0.444	0.533	0.621	0.710	0.799
0.452	0.542	0.633	0.723	0.813
0.460	0.552	0.644	0.736	0.828
0.468	0.562	0.655	0.749	0.842
0.476	0.571	0.667	0.762	0.857
0.484	0.581	0.678	0.775	0.872
0.492	0.591	0.689	0·788	0.886
0.500	0.600	0.700	0.800	0.901
0.508	0.610	0.712	0.813	0.915
0.516	0.620	0.723	0.826	0.930
0.525	0.629	0.734	0.839	0.944
0.533	0.639	0.746	0.852	0.959
0.541	0.649	0.757	0.865	0.973
0.549	0.658	0.768	0.878	0.988
0.557	0.668	0.780	0.891	1.002
0.565	0.678	0.791	0.904	1.017
0.573	0.688	0.802	0.917	1.031
0.581	0.697	0.813	0.930	1.046
0.589	0.707	0.825	0.943	1.060
0.597	0.717	0.836	0.955	1.075
0.605	0.726	0.847	0.968	1.089
0.613	0.736	0.859	0.981	1.104
0.621	0.746	0·870	0.994	1.118
0.629	0.755	0.881	1.007	1.133
0.637	0.765	0.893	1.020	1.148

Hauteur de la colonne d'air, à 0° et sous 0°.

Argument : h_0 =

	0	1	2	3	4
	mètres	mètres	mètres	mètres	mètres
0	0	105.2	210.3	315.5	420.7
10	1051.7	1156.9	1262.1	1367.2	1472.4
20	2103.5	2208.6	2313.8	2419.0	2524.2
30	3155.2	3260.4	3365.5	3470.7	3575.9
40	4206.9	4312.1	4417.3	4522.4	4627.6
50	5258.7	5363.8	5469.0	5574.2	5679.3
60	6310.4	6415.6	6520.7	6625.9	6731.1
70	7362.1	7467.3	7572.5	7677.6	7782.8
80	8413.8	8519.0	8624.2	8729.4	8834.5
90	9465.6	9570.7	9675.9	9781.1	9886.3

Argument : h_0 =

	0	1	2	3	4
	mètres	mètres	mètres	mètres	mètres
0	0	1.1	2.1	3.2	4.2
10	10.5	11.6	12.6	13.7	14.7
20	21.0	22.1	23.1	24.2	25.2
30	31.6	32.6	33.7	34.7	35.8
40	42.1	43.1	44.2	45.2	46.3
50	52.6	53.6	54.7	55.7	56.8
60	63.1	64.2	65.2	66.3	67.3
70	73.6	74.7	75.7	76.8	77.8
80	84.1	85.2	86.2	87.3	88.3
90	94.7	95.7	96.8	97.8	98.9

même poids que la colonne mercurielle.

h)

ntimètres.

5	6	7	8	9	
mètres	mètres	mètres	mètres	mètres	
525.9	631.0	736.2	841.4	946.6	0
1577.6	1682.8	1787.9	1893.1	1998.3	10
2629.3	2734.5	2839.7	2944.8	3050.0	20
3681.1	3786.2	3891.4	3996.6	4101.7	30
4732.8	4838.0	4943.1	5048.3	5153.5	40
5784.5	5889.7	5994.9	6100.0	6205.2	50
6836.2	6941.4	7046.6	7151.8	7256.9	60
7888.0	7993.1	8098.3	8203.5	8308.7	70
8939.7	9044.9	9150.1	9255.2	9360.4	80
9991.4	10096.6	10201.8	10307.0	10412.1	90

écimillimètres.

5	6	7	8	9	
mètres	mètres	mètres	mètres	mètres	
5.3	6.3	7.4	8.4	9.5	0
15.8	16.8	17.9	18.9	20.0	10
26.3	27.3	28.4	29.4	30.5	20
36.8	37.9	38.9	40.0	41.0	30
47.3	48.4	49.4	50.5	51.5	40
57.8	58.9	59.9	61.0	62.1	50
68.4	69.4	70.5	71.5	72.6	60
78.9	79.9	81.0	82.0	83.1	70
89.4	90.4	91.5	92.6	93.6	80
99.9	101.0	102.0	103.1	104.1	90

TABLE III.

Force élastique de la vapeur d'eau, exprimée en millimètres de mercure, multipliée par $\frac{s}{s}$.

TEMPÉRATURE	FORCE	DIFFÉRENCE	TEMPÉRATURE	FORCE	DIFFÉRENCE
degrés	millim.		degrés	millim.	
— 20	0.34		10	3.44	22
— 19	0.37	3	11	3.67	23
— 18	0.40	3	12	3.92	25
— 17	0.44	4	13	4.19	27
— 16	0.48	4	14	4.47	28
— 15	0.52	4	15	4.76	29
— 14	0.56	4	16	5.08	32
— 13	0.61	5	17	5.41	33
— 12	0.66	5	18	5.76	35
— 11	0.72	6	19	6.13	37
— 10	0.78	6	20	6.52	39
— 9	0.85	7	21	6.94	42
— 8	0.92	7	22	7.37	43
— 7	1.00	8	23	7.83	46
— 6	1.08	8	24	8.32	49
— 5	1.17	9	25	9.83	51
— 4	1.27	10	26	9.37	54
— 3	1.37	10	27	9.94	57
— 2	1.48	11	28	10.54	60
— 1	1.60	12	29	11.17	63
0	1.72	12	30	11.83	66
1	1.85	13	31	12.53	70
2	1.99	14	32	13.26	73
3	2.13	14	33	14.03	77
4	2.29	16	34	14.84	81
5	2.45	16	35	15.69	85
6	2.62	17	36	16.58	89
7	2.81	19	37	17.51	93
8	3.01	20	38	18.49	98
9	3.22	21	39	19.51	102

Valeur du produit $\frac{s}{8} A (t - t') h$, dans l

Arguments : $t - t'$, différence des thermomètr

h	1°	2°	3°	4°
millim.	millim.	millim.	millim.	millim.
200	0.06	0.12	0.18	0.24
210	0.06	0.13	0.19	0.25
220	0.07	0.13	0.20	0.26
230	0.07	0.14	0.21	0.28
240	0.07	0.14	0.22	0.29
250	0.08	0.15	0.23	0.30
260	0.08	0.16	0.23	0.31
270	0.08	0.16	0.24	0.32
280	0.08	0.17	0.25	0.34
290	0.09	0.17	0.26	0.35
300	0.09	0.18	0.27	0.36
310	0.09	0.19	0.28	0.37
320	0.10	0.19	0.29	0.38
330	0.10	0.20	0.30	0.40
340	0.10	0.20	0.31	0.41
350	0.11	0.21	0.32	0.42
360	0.11	0.22	0.32	0.43
370	0.11	0.22	0.33	0.44
380	0.11	0.23	0.34	0.46
390	0.12	0.23	0.35	0.47
400	0.12	0.24	0.36	0.48
410	0.12	0.25	0.37	0.49
420	0.13	0.25	0.38	0.50
430	0.13	0.26	0.39	0.52
440	0.13	0.26	0.40	0.53
450	0.14	0.27	0.41	0.54
460	0.14	0.28	0.41	0.55
470	0.14	0.28	0.42	0.56
480	0.14	0.29	0.43	0.58
490	0.15	0.29	0.44	0.59

nule du Psychromètre (A = 0,0008).

et humide ; h, hauteur du baromètre.

t'				
5°	6°	7°	8°	9°
millim.	millim.	millim.	millim.	millim.
0.30	0.36	0.42	0.48	0.54
0.32	0.38	0.44	0.50	0.57
0.33	0.40	0.46	0.53	0.59
0.35	0.41	0.48	0.55	0.62
0.36	0.43	0.50	0.58	0.65
0.38	0.45	0.53	0.60	0.68
0.39	0.47	0.55	0.62	0.70
0.41	0.49	0.57	0.65	0.73
0.42	0.50	0.59	0.67	0.76
0.44	0.52	0·61	0.70	0.78
0.45	0.54	0.63	0.72	0.81
0.47	0.56	0.65	0.74	0.84
0.48	0.58	0.67	0.77	0.86
0.50	0.59	0.69	0.79	0.89
0.51	0.61	0.71	0.82	0.92
0.53	0.63	0.74	0.84	0.95
0.54	0.65	0.76	0.86	0.97
0.56	0.67	0.78	0.89	1.00
0.57	0.68	0.80	0.91	1.03
0.59	0.70	0.82	0.94	1.05
0.60	0.72	0.84	0.96	1.08
0.62	0.74	0.86	0.98	1.11
0.63	0.76	0.88	1.01	1.13
0.65	0.77	0.90	1·03	1.16
0.66	0.79	0.92	1.06	1.19
0.68	0.81	0.95	1.08	1.22
0.69	0.83	0.97	1.10	1.24
0.71	0.85	0.99	1.13	1.27
0.72	0.86	1.01	1.15	1.30
0.74	0.88	1.03	1.18	1.32

TABLE

h	1°	2°	3°	4°
millim.	millim.	millim.	millim.	millim.
500	0.15	0.30	0.45	0.60
510	0.15	0.31	0.46	0.61
520	0.16	0.31	0.47	0.62
530	0.16	0.32	0.48	0.64
540	0.16	0.32	0.49	0.65
550	0.17	0.33	0.50.	0.66
560	0.17	0.34	0.50	0.67
570	0.17	0.34	0.51	0 68
580	0.17	0.35	0.52	0.70
590	0.18	0.35	0.53	0.71
600	0.18	0.36	0.54	0.72
610	0.18	0.37	0.55	0.73
620	0.19	0.37	0.56	0.74
630	0.19	0.38	0.57	0.76
640	0.19	0.38	0.58	0.77
650	0.20	0.39	0.59	0.78
660	0.20	0.40	0.59	0.79
670	0.20	0.40	0.60	0.80
680	0.20	0.41	0.61	0.82
690	0.21	0.41	0.62	0.83
700	0.21	0.42	0.63	0.84
710	0.21	0.43	0.64	0.85
720	0.22	0.43	0.65	0.86
730	0.22	0.44	0.66	0.88
740	0.22	0.44	0.67	0.89
750	0.23	0.45	0.68	0.90
760	0.23	0.46	0.68	0.91
770	0.23	0.46	0.69	0.92
780	0.23	0.47	0.70	0.94
790	0.24	0.47	0.71	0.95

V. — *(Suite).*

t'				
5°	6°	7°	8°	9°
millim.	millim.	millim.	millim.	millim.
0.75	0.90	1.05	1.20	1.35
0.77	0.92	1.07	1.22	1.38
0.78	0.94	1.09	1.25	1.40
0.80	0.95	1.11	1.27	1.43
0.81	0.97	1.13	1.30	1.46
0.83	0.99	1.16	1.32	1.49
0.84	1.01	1.18	1.34	1.51
0.86	1.03	1.20	1.37	1.54
0.87	1.04	1.22	1.39	1.57
0.89	1.06	1.24	1.42	1.59
0.90	1.08	1.26	1.44	1.62
0.92	1.10	1.28	1.46	1.65
0.93	1.12	1.30	1.49	1.67
0.95	1.13	1.32	1.51	1.70
0.96	1.15	1.34	1.54	1.73
0.98	1.17	1.37	1.56	1.76
0.99	1.19	1.39	1.58	1.78
1.01	1.21	1.41	1.61	1.81
1.02	1.22	1.43	1.63	1.84
1.04	1.24	1.45	1.66	1.86
1.05	1.26	1.47	1.68	1.89
1.07	1.28	1.49	1.70	1.92
1.08	1.30	1.51	1.73	1.94
1.10	1.31	1.53	1.75	1.97
1.11	1.33	1.55	1.78	2.00
1.13	1.35	1.58	1.80	2.03
1.14	1.37	1.60	1.82	2.05
1.16	1.39	1.62	1.85	2.08
1.17	1.40	1.64	1.87	2.11
1.19	1.42	1.66	1.90	2.13

TABLE V.

Densité de l'air,

celle de l'air à 0° et sous 0m.76 étant prise pour unité,

$$\delta = \frac{274}{76}\left(\frac{h}{274+t}\right)$$

h	Température			
	— 20°	— 19°	— 18°	— 17°
cm.				
20	0.2839	0.2828	0.2817	0.2806
21	0.2981	0.2969	0.2957	0.2946
22	0.3123	0.3110	0.3098	0.3086
23	0.3265	0.3252	0.3239	0.3226
24	0.3407	0.3393	0.3380	0.3367
25	0.3548	0.3535	0.3521	0.3507
26	0.3690	0.3676	0.3662	0.3647
27	0.3832	0.3817	0.3802	0.3788
28	0.3974	0.3959	0.3943	0.3928
29	0.4116	0.4100	0.4084	0.4068
30	0.4258	0.4241	0.4225	0.4208
31	0.4400	0.4383	0.4366	0.4349
32	0.4542	0.4524	0.4507	0.4489
33	0.4684	0.4666	0.4647	0.4629
34	0.4826	0.4807	0.4788	0.4770
35	0.4968	0.4948	0.4929	0.4910
36	0.5110	0.5090	0.5070	0.5050
37	0.5252	0.5231	0.5211	0.5190
38	0.5394	0.5373	0.5352	0.5331
39	0.5536	0.5514	0.5492	0.5471
40	0.5678	0.5655	0.5633	0.5611
41	0.5820	0.5797	0.5774	0.5752
42	0.5961	0.5938	0.5915	0.5892
43	0.6103	0.6079	0.6056	0.6032
44	0.6245	0.6221	0.6197	0,6172
45	0.6387	0.6362	0.6337	0.6313
46	0.6529	0.6504	0.6478	0.6453
47	0.6671	0.6645	0.6619	0.6593
48	0.6813	0.6786	0.6760	0.6734
49	0.6955	0.6928	0.6901	0·6874
Diff.	0.0142	0.0141	0.0141	0.0140

TABLE V. — *(Suite).*

— 20° à — 17°

h	Température			
	— 20°	— 19°	— 18°	— 17°
cm.				
50	0.7097	0.7069	0.7042	0.7014
51	0.7239	0.7211	0.7182	0.7154
52	0.7381	0.7352	0.7323	0.7295
53	0.7523	0.7493	0.7464	0.7435
54	0.7665	0.7635	0.7605	0.7575
55	0.7807	0.7776	0.7746	0.7716
56	0.7949	0.7917	0.7886	0.7856
57	0.8091	0.8059	0.8027	0.7996
58	0.8232	0.8200	0.8168	0.8136
59	0.8374	0.8342	0.8309	0.8277
60	0.8516	0.8483	0.8450	0.8417
61	0.8658	0.8624	0.8591	0.8557
62	0 8800	0.8766	0.8731	0.8698
63	0.8942	0.8907	0.8872	0.8838
64	0.9084	0.9048	0.9013	0.8978
65	0.9226	0.9190	0.9154	0.9118
66	0.9368	0.9331	0.9295	0.9259
67	0.9510	0.9473	0.9436	0.9399
68	0.9652	0.9614	0.9576	0.9539
69	0.9794	0.9755	0.9717	0.9680
70	0.9936	0.9897	0.9858	0.9820
71	1.0078	1.0038	0.9999	0.9960
72	1.0220	1.0180	1.0140	1.0100
73	1.0362	1.0321	1.0281	1.0241
74	1.0504	1.0462	1.0421	1.0381
75	1.0645	1.0604	1.0562	1.0521
76	1.0787	1.0745	1.0703	1.0662
77	1.0929	1.0886	1.0844	1.0802
78	1.1071	1.1028	1.0985	1.0942
79	1.1213	1.1169	1.1126	1.1082
Diff.	0.0142	0.0141	0.0141	0.0140

TABLE V. — *(Suite).*

— 16° à — 13°

h	Température			
	— 16°	— 15°	— 14°	— 13°
cm.				
20	0.2795	0.2784	0.2773	0.2763
21	0.2935	0.2923	0.2912	0.2901
22	0.3074	0.3062	0.3051	0.3039
23	0.3214	0.3202	0.3189	0.3177
24	0.3354	0.3341	0.3328	0.3315
25	0.3493	0.3480	0.3467	0.3453
26	0.3633	0.3619	0.3605	0.3591
27	0.3773	0.3758	0.3744	0.3730
28	0.3913	0.3898	0.3883	0.3868
29	0.4052	0.4037	0.4021	0.4006
30	0.4192	0.4176	0.4160	0.4144
31	0.4332	0.4315	0.4299	0.4282
32	0.4472	0.4454	0.4437	0.4420
33	0.4611	0.4594	0.4576	0.4558
34	0.4751	0.4733	0.4715	0.4697
35	0.4891	0.4872	0.4853	0.4835
36	0.5031	0.5011	0.4992	0.4973
37	0.5170	0.5150	0.5131	0.5111
38	0.5310	0.5290	0.5269	0.5249
39	0.5450	0.5429	0.5408	0.5387
40	0.5590	0.5568	0.5547	0.5525
41	0.5729	0.5707	0.5685	0.5663
42	0.5869	0.5846	0.5824	0.5802
43	0.6009	0.5986	0.5963	0.5940
44	0.6149	0.6125	0.6101	0.6078
45	0.6288	0.6264	0.6240	0.6216
46	0.6428	0.6403	0.6379	0.6354
47	0.6568	0.6542	0.6517	0.6492
48	0.6708	0.6682	0.6656	0.6630
49	0.6847	0.6821	0.6795	0.6769
Diff.	0.0140	0.0139	0.0139	0.0138

TABLE V. — *(Suite).*

— 16° à — 13°

h	Température			
	— 16°	— 15°	— 14°	— 13°
cm.				
50	0.6987	0.6960	0.6933	0.6907
51	0.7127	0.7099	0.7072	0.7045
52	0.7266	0.7238	0.7211	0.7183
53	0.7406	0.7378	0.7349	0.7321
54	0.7546	0.7517	0.7488	0.7459
55	0.7686	0.7656	0.7627	0.7597
56	0.7825	0.7795	0.7765	0.7735
57	0.7965	0.7934	0.7904	0.7874
58	0.8105	0.8074	0.8043	0.8012
59	0.8245	0.8213	0.8181	0.8150
60	0.8384	0.8352	0.8320	0.8288
61	0.8524	0.8491	0.8459	0.8426
62	0.8664	0.8630	0.8597	0.8564
63	0.8804	0.8770	0.8736	0.8702
64	0.8943	0.8909	0.8874	0.8840
65	0.9083	0.9048	0.9013	0.8979
66	0.9223	0.9187	0.9152	0.9117
67	0.9363	0.9326	0.9290	0.9255
68	0.9502	0.9466	0.9429	0.9393
69	0.9642	0.9605	0.9568	0.9531
70	0.9782	0.9744	0.9706	0.9669
71	0.9922	0.9883	0.9845	0.9807
72	1.0061	1.0022	0.9984	0.9946
73	1.0201	1.0162	1.0122	1.0084
74	1.0341	1.0301	1.0261	1.0222
75	1.0480	1.0440	1.0400	1.0360
76	1.0620	1.0579	1.0538	1.0498
77	1.0760	1.0718	1.0677	1.0636
78	1.0900	1.0858	1.0816	1.0774
79	1.1039	1.0997	1.0954	1.0912
Diff.	0.0140	0.0139	0.0139	0.0138

TABLE V. — *(Suite).*

— 12° à — 9°

h	Température			
	— 12°	— 11°	— 10°	— 9°
cm.				
20	0.2752	0.2742	0.2731	0.2721
21	0.2890	0.2879	0.2868	0.2857
22	0.3027	0.3016	0.3004	0.2993
23	0.3165	0.3153	0.3141	0.3129
24	0.3303	0.3290	0.3278	0.3265
25	0.3440	0.3427	0.3414	0.3401
26	0.3578	0.3564	0.3551	0.3537
27	0.3715	0.3701	0.3687	0.3673
28	0.3853	0.3838	0.3824	0.3809
29	0.3991	0.3975	0.3960	0.3945
30	0.4128	0.4112	0.4097	0.4081
31	0.4266	0.4250	0.4233	0.4217
32	0.4403	0.4387	0.4370	0.4354
33	0.4541	0.4524	0.4507	0.4490
34	0.4679	0.4661	0.4643	0.4626
35	0.4816	0.4798	0.4780	0.4762
36	0.4954	0.4935	0.4916	0.4898
37	0.5091	0.5072	0.5053	0.5034
38	0.5229	0.5209	0.5189	0.5170
39	0.5367	0.5346	0.5326	0.5306
40	0.5504	0.5483	0.5463	0.5442
41	0.5642	0.5620	0.5599	0.5578
42	0.5779	0.5757	0.5736	0.5714
43	0.5917	0.5895	0.5872	0.5850
44	0.6055	0.6032	0.6009	0.5986
45	0.6192	0.6169	0.6145	0.6123
46	0.6330	0.6306	0.6282	0.6259
47	0.6467	0.6443	0.6418	0.6395
48	0.6605	0.6580	0.6555	0.6531
49	0.6743	0.6717	0.6692	0.6667
Diff.	0.0138	0.0137	0.0137	0.0136

TABLE V. — *(Suite).*

— 12° à — 9°

h	Température			
	— 12°	— 11°	— 10°	— 9°
cm.				
50	0.6880	0.6854	0.6828	0.6802
51	0.7018	0.6991	0.6965	0.6938
52	0.7155	0.7128	0.7101	0.7074
53	0.7293	0.7265	0.7238	0.7211
54	0.7431	0.7402	0.7374	0.7347
55	0.7568	0.7540	0.7511	0.7483
56	0.7706	0.7677	0.7648	0.7619
57	0.7844	0.7814	0.7784	0.7755
58	0.7981	0.7951	0.7921	0.7891
59	0.8119	0.8088	0.8057	0.8027
60	0.8256	0.8225	0.8194	0.8163
61	0.8394	0.8362	0.8330	0.8299
62	0.8532	0.8499	0.8467	0.8435
63	0.8669	0.8636	0.8603	0.8571
64	0.8807	0.8773	0.8740	0.8707
65	0.8944	0.8910	0.8877	0.8843
66	0.9082	0.9047	0.9013	0.8979
67	0.9220	0.9185	0.9150	0.9115
68	0.9357	0.9322	0.9286	0.9251
69	0.9495	0.9459	0.9423	0.9387
70	0.9632	0.9596	0.9559	0.9523
71	0.9770	0.9733	0.9696	0.9659
72	0.9908	0.9870	0.9833	0.9795
73	1.0045	1.0007	0.9969	0.9931
74	1.0183	1.0144	1.0106	1.0068
75	1.0320	1.0281	1.0242	1.0204
76	1.0458	1.0418	1.0379	1.0340
77	1.0596	1.0555	1.0515	1.0476
78	1.0733	1.0692	1.0652	1.0612
79	1.0871	1.0829	1.0788	1.0748
Diff.	0.0138	0.0137	0.0137	0.0136

TABLE V. — *(Suite)*.

— 8° à — 5°

h	Température			
	— 8°	— 7°	— 6°	— 5°
cm.				
20	0.2711	0.2701	0.2690	0.2680
21	0.2846	0.2836	0.2825	0.2815
22	0.2982	0.2971	0.2960	0.2949
23	0.3117	0.3106	0.3094	0.3083
24	0.3253	0.3241	0.3229	0.3217
25	0.3388	0.3376	0.3363	0.3351
26	0.3524	0.3511	0.3498	0.3485
27	0.3659	0.3646	0.3632	0.3619
28	0.3795	0.3781	0.3767	0.3753
29	0.3931	0.3916	0.3901	0.3887
30	0.4066	0.4051	0.4036	0.4021
31	0.4202	0.4186	0.4170	0.4155
32	0.4337	0.4321	0.4305	0.4289
33	0.4473	0.4456	0.4439	0.4423
34	0.4608	0.4591	0.4574	0.4557
35	0.4744	0.4726	0.4708	0.4691
36	0.4879	0.4861	0.4843	0.4825
37	0.5015	0.4996	0.4977	0.4959
38	0.5150	0.5131	0.5112	0.5093
39	0.5286	0.5266	0.5246	0.5227
40	0.5421	0.5401	0.5381	0.5361
41	0.5557	0.5536	0.5516	0.5495
42	0.5693	0.5671	0.5650	0.5629
43	0.5828	0.5806	0.5785	0.5763
44	0.5964	0.5941	0.5919	0.5897
45	0.6099	0.6076	0.6054	0.6031
46	0.6235	0.6211	0.6188	0.6165
47	0.6370	0.6346	0.6323	0.6299
48	0.6506	0.6481	0.6457	0.6433
49	0.6641	0.6616	0.6592	0.6567
Diff.	0.0136	0.0135	0.0135	0.0134

TABLE V. — *(Suite).*

— 8° à — 5°

h	Température			
	— 8°	— 7°	— 6°	— 5°
cm.				
50	0.6777	0.6751	0.6726	0.6701
51	0.6912	0.6886	0.6861	0.6835
52	0.7048	0.7021	0.6995	0.6969
53	0.7183	0.7157	0.7130	0.7103
54	0.7319	0.7292	0.7264	0.7237
55	0.7454	0.7427	0.7399	0.7371
56	0.7590	0.7562	0.7533	0.7505
57	0.7726	0.7697	0.7668	0.7639
58	0.7861	0.7832	0.7802	0.7773
59	0.7997	0.7967	0.7937	0.7907
60	0.8132	0.8102	0.8071	0.8041
61	0.8268	0.8237	0.8206	0.8175
62	0.8403	0.8372	0.8341	0.8309
63	0.8539	0.8507	0.8475	0.8444
64	0.8674	0.8642	0.8610	0.8578
65	0.8810	0.8777	0.8744	0.8712
66	0.8945	0.8912	0.8879	0.8846
67	0.9081	0.9047	0.9013	0.8980
68	0.9216	0.9182	0.9146	0.9114
69	0.9352	0.9317	0.9282	0.9248
70	0.9488	0.9452	0.9417	0.9382
71	0.9623	0.9587	0.9551	0.9516
72	0.9759	0.9722	0.9686	0.9650
73	0.9894	0.9857	0.9820	0.9784
74	1.0030	0.9992	0.9955	0.9918
75	1.0165	1.0127	1.0089	1.0052
76	1.0301	1.0262	1.0224	1.0186
77	1.0436	1.0397	1.0358	1.0320
78	1.0572	1.0532	1.0493	1.0454
79	1.0707	1.0667	1.0627	1.0588
Diff.	0.0136	0.0135	0.0135	0.0134

TABLE V. — *(Suite).*

— 4° à — 1°

h	Température			
	— 4°	— 3°	— 2°	— 1°
cm.				
20	0.2671	0.2661	0.2651	0.2641
21	0.2804	0.2794	0.2783	0.2773
22	0.2938	0.2927	0.2916	0.2905
23	0.3071	0.3060	0.3049	0.3037
24	0.3205	0.3193	0.3181	0.3169
25	0.3338	0.3326	0.3314	0.3302
26	0.3472	0.3459	0.3446	0.3434
27	0.3605	0.3592	0.3579	0.3566
28	0.3739	0.3725	0.3711	0.3698
29	0.3872	0.3858	0.3844	0.3830
30	0.4006	0.3991	0.3976	0.3962
31	0.4139	0.4124	0.4109	0.4094
32	0.4273	0.4257	0.4241	0.4226
33	0.4406	0.4390	0.4374	0.4358
34	0.4540	0.4523	0.4507	0.4490
35	0.4673	0.4656	0.4639	0.4622
36	0.4807	0.4789	0.4772	0.4754
37	0.4941	0.4922	0.4904	0.4886
38	0.5074	0.5055	0.5037	0.5018
39	0.5208	0.5188	0.5169	0.5150
40	0.5341	0.5321	0.5302	0.5282
41	0.5475	0.5454	0.5434	0.5414
42	0.5608	0.5588	0.5567	0.5547
43	0.5742	0.5721	0.5699	0.5679
44	0.5875	0.5854	0.5832	0.5811
45	0.6009	0.5987	0.5965	0.5943
46	0.6142	0.6120	0.6097	0.6075
47	0.6276	0.6253	0.6230	0.6207
48	0.6409	0.6386	0.6362	0.6339
49	0.6543	0.6519	0.6495	0.6471
Diff.	0.0134	0.0133	0.0133	0.0132

TABLE V. — *(Suite).*

— 4° à — 1°

h	Température			
	— 4°	— 3°	— 2°	— 1°
cm.				
50	0.6676	0.6652	0.6627	0.6603
51	0.6810	0.6785	0.6760	0.6735
52	0.6943	0.6918	0.6892	0.6867
53	0.7077	0.7051	0.7025	0.6999
54	0.7211	0.7184	0.7157	0.7131
55	0.7344	0.7317	0.7290	0.7263
56	0.7478	0.7450	0.7423	0.7395
57	0.7611	0.7583	0.7555	0.7527
58	0.7745	0.7716	0.7688	0.7660
59	0.7878	0.7849	0.7820	0.7792
60	0.8012	0.7982	0.7953	0.7924
61	0.8145	0.8115	0.8085	0.8056
62	0.8279	0.8248	0.8218	0.8188
63	0.8412	0.8381	0.8350	0.8320
64	0.8546	0.8514	0.8483	0.8452
65	0.8679	0.8647	0.8615	0.8584
66	0.8813	0.8780	0.8748	0.8716
67	0.8946	0.8913	0.8881	0.8848
68	0.9080	0.9046	0.9013	0.8980
69	0.9213	0.9179	0.9146	0.9112
70	0.9347	0.9312	0.9278	0.9244
71	0.9480	0.9445	0.9411	0.9376
72	0.9614	0.9579	0.9543	0.9508
73	0.9748	0.9712	0.9676	0.9640
74	0.9881	0.9845	0.9808	0.9773
75	1.0015	0.9978	0.9941	0.9905
76	1.0148	1.0111	1.0073	1.0037
77	1.0282	1.0244	1.0206	1.0169
78	1.0415	1.0377	1.0339	1.0301
79	1.0549	1.0510	1.0471	1.0433
Diff.	0.0134	0.0133	0.0133	0.0132

TABLE V. — *(Suite).*

0° à 3°

h	Température			
	0°	1°	2°	3°
cm.				
20	0.2632	0.2622	0.2613	0.2603
21	0.2763	0.2753	0.2743	0.2733
22	0.2895	0.2884	0.2874	0.2863
23	0.3026	0.3015	0.3004	0.2994
24	0.3158	0.3146	0.3135	0.3124
25	0.3289	0.3278	0.3266	0.3254
26	0.3421	0.3409	0.3396	0.3384
27	0.3553	0.3540	0.3527	0.3514
28	0.3684	0.3671	0.3658	0.3644
29	0.3816	0.3802	0.3788	0.3774
30	0.3947	0.3933	0.3919	0.3905
31	0.4079	0.4064	0.4049	0.4035
32	0.4211	0.4195	0.4180	0.4165
33	0.4342	0.4326	0.4311	0.4295
34	0.4474	0.4457	0.4441	0.4425
35	0.4605	0.4589	0.4572	0.4555
36	0.4737	0.4720	0.4703	0.4686
37	0.4868	0.4851	0.4833	0.4816
38	0.5000	0.4982	0.4964	0.4946
39	0.5132	0.5113	0.5094	0.5076
40	0.5263	0.5244	0.5225	0.5206
41	0.5395	0.5375	0.5356	0.5336
42	0.5526	0.5506	0.5486	0.5466
43	0.5658	0.5637	0.5617	0.5597
44	0.5789	0.5768	0.5748	0.5727
45	0.5921	0.5900	0.5878	0.5857
46	0.6053	0.6031	0.6009	0.5987
47	0.6184	0.6162	0.6139	0.6117
48	0.6316	0.6293	0.6270	0.6247
49	0.6447	0.6424	0.6401	0.6378
Diff.	0.0132	0.0131	0.0131	0.0130

TABLE V. — *(Suite).*

0° à 3°

h	Température			
	0°	1°	2°	3°
cm.				
50	0.6579	0.6555	0.6531	0.6508
51	0.6711	0.6686	0.6662	0.6638
52	0.6842	0.6817	0.6793	0.6768
53	0.6974	0.6948	0.6923	0.6898
54	0.7105	0.7079	0.7054	0.7028
55	0.7237	0.7211	0.7184	0.7158
56	0.7368	0.7342	0.7315	0.7289
57	0.7500	0.7473	0.7446	0.7419
58	0.7632	0.7604	0.7576	0.7549
59	0.7763	0.7735	0.7707	0.7679
60	0.7895	0.7866	0.7838	0.7809
61	0.8026	0.7997	0.7968	0.7939
62	0.8158	0.8128	0.8099	0.8070
63	0.8289	0.8259	0.8229	0.8200
64	0.8421	0.8390	0.8360	0.8330
65	0.8553	0.8522	0.8491	0.8460
66	0.8684	0.8653	0.8621	0.8590
67	0.8816	0.8784	0.8752	0.8720
68	0.8947	0.8915	0.8883	0.8850
69	0.9079	0.9046	0.9013	0.8981
70	0.9211	0.9177	0.9144	0.9111
71	0.9342	0.9308	0.9274	0.9241
72	0.9474	0.9439	0.9405	0.9371
73	0.9605	0.9570	0.9536	0.9501
74	0.9737	0.9701	0.9666	0.9631
75	0.9868	0.9833	0.9797	0.9762
76	1.0000	0.9964	0.9928	0.9892
77	1.0132	1.0095	1.0058	1.0022
78	1.0263	1.0226	1.0189	1.0152
79	1.0395	1.0357	1.0319	1.0282
Diff.	0.0132	0.0131	0.0131	0.0130

TABLE V. — *(Suite).*

4° à 7°

h	Température			
	4°	5°	6°	7°
cm.				
20	0.2594	0.2584	0.2575	0.2566
21	0.2723	0.2714	0.2704	0.2694
22	0.2853	0.2843	0.2833	0.2823
23	0.2983	0.2972	0.2961	0.2951
24	0.3112	0.3101	0.3090	0.3079
25	0.3242	0.3231	0.3219	0.3208
26	0.3372	0.3360	0.3348	0.3336
27	0.3502	0.3489	0.3477	0.3464
28	0.3631	0.3618	0.3605	0.3592
29	0.3761	0.3747	0.3734	0.3721
30	0.3891	0.3877	0.3863	0.3849
31	0.4020	0.4006	0.3992	0.3977
32	0.4150	0.4135	0.4120	0.4106
33	0.4280	0.4264	0.4249	0.4234
34	0.4409	0.4394	0.4378	0.4362
35	0.4539	0.4523	0.4507	0.4491
36	0.4669	0.4652	0.4635	0.4619
37	0.4798	0.4781	0.4764	0.4747
38	0.4928	0.4910	0.4893	0.4875
39	0.5058	0.5040	0.5022	0.5004
40	0.5187	0.5169	0.5150	0.5132
41	0.5317	0.5298	0.5279	0.5260
42	0.5447	0.5427	0.5408	0.5389
43	0.5576	0.5557	0.5537	0.5517
44	0.5706	0.5686	0.5665	0.5645
45	0.5836	0.5815	0.5794	0.5774
46	0.5966	0.5944	0.5923	0.5902
47	0.6095	0.6073	0.6052	0.6030
48	0.6225	0.6203	0.6180	0.6158
49	0.6355	0.6332	0.6309	0.6287
Diff.	0.0130	0.0129	0.0129	0.0128

TABLE V. — *(Suite).*

4° à 7°

h	Température			
	4°	5°	6°	7°
cm.				
50	0.6484	0.6461	0.6438	0.6415
51	0.6614	0.6590	0.6567	0.6543
52	0.6744	0.6719	0.6695	0.6672
53	0.6873	0.6849	0.6824	0.6800
54	0.7003	0.6978	0.6953	0.6928
55	0.7133	0.7107	0.7082	0.7057
56	0.7262	0.7236	0.7211	0.7185
57	0.7392	0.7366	0.7339	0.7313
58	0.7522	0.7495	0.7468	0.7441
59	0.7651	0.7624	0.7597	0.7570
60	0.7781	0.7753	0.7726	0.7698
61	0.7911	0.7882	0.7854	0.7826
62	0.8041	0.8012	0.7983	0.7955
63	0.8170	0.8141	0.8112	0.8083
64	0.8300	0.8270	0.8241	0.8211
65	0.8430	0.8399	0.8369	0.8340
66	0.8559	0.8529	0.8498	0.8468
67	0.8689	0.8658	0.8627	0.8596
68	0.8819	0.8787	0.8756	0.8724
69	0.8948	0.8916	0.8884	0.8853
70	0.9078	0.9045	0.9013	0.8981
71	0.9208	0.9175	0.9142	0.9109
72	0.9337	0.9304	0.9271	0.9238
73	0.9467	0.9433	0.9399	0.9366
74	0.9597	0.9562	0.9528	0.9494
75	0.9726	0.9692	0.9657	0.9623
76	0.9856	0.9821	0.9786	0.9751
77	0.9986	0.9950	0.9914	0.9879
78	1.0115	1.0079	1.0043	1.0007
79	1.0245	1.0208	1.0172	1.0136
Diff.	0.0130	0.0129	0.0129	0.0128

TABLE V. — *(Suite).*

8° à 11°

h	Température			
	8°	9°	10°	11°
cm.				
20	0.2557	0.2548	0.2539	0.2530
21	0.2685	0.2675	0.2666	0.2657
22	0.2813	0.2803	0.2793	0.2783
23	0.2940	0.2930	0.2920	0.2910
24	0.3068	0.3057	0.3047	0.3036
25	0.3196	0.3185	0.3174	0.3163
26	0.3324	0.3312	0.3301	0.3289
27	0.3452	0.3440	0.3428	0.3416
28	0.3580	0.3567	0.3554	0.3542
29	0.3708	0.3694	0.3681	0.3669
30	0.3835	0.3822	0.3808	0.3795
31	0.3963	0.3949	0.3935	0.3922
32	0.4091	0.4077	0.4062	0.4048
33	0.4219	0.4204	0.4189	0.4175
34	0.4347	0.4331	0.4316	0.4301
35	0.4475	0.4459	0.4443	0.4428
36	0.4602	0.4586	0.4570	0.4554
37	0.4730	0.4714	0.4697	0.4681
38	0.4858	0.4841	0.4824	0.4807
39	0.4986	0.4968	0.4951	0.4934
40	0.5114	0.5096	0.5078	0.5060
41	0.5242	0.5223	0.5205	0.5187
42	0.5370	0.5351	0.5332	0.5313
43	0.5497	0.5478	0.5459	0.5440
44	0.5625	0.5605	0.5586	0.5566
45	0.5753	0.5733	0.5713	0.5693
46	0.5881	0.5860	0.5840	0.5819
47	0.6009	0.5988	0.5966	0.5946
48	0.6137	0.6115	0.6093	0.6072
49	0.6264	0.6242	0.6220	0.6199
Diff.	0.0128	0.0127	0.0127	0.0127

TABLE V. — *(Suite).*

8° à 11°

h	Température			
	8°	9°	10°	11°
cm.				
50	0.6392	0.6370	0.6347	0.6325
51	0.6520	0.6497	0.6474	0.6452
52	0.6648	0.6625	0.6601	0.6578
53	0.6776	0.6752	0.6728	0.6705
54	0.6904	0.6879	0.6855	0.6831
55	0.7032	0.7007	0.6982	0.6958
56	0.7159	0.7134	0.7109	0.7084
57	0.7287	0.7261	0.7236	0.7211
58	0.7415	0.7389	0.7363	0.7337
59	0.7543	0.7516	0.7490	0.7464
60	0.7671	0.7644	0.7617	0.7590
61	0.7799	0.7771	0.7744	0.7717
62	0.7926	0.7898	0.7871	0.7843
63	0.8054	0.8026	0.7998	0.7970
64	0.8182	0.8153	0.8125	0.8096
65	0.8310	0.8281	0.8251	0.8223
66	0.8438	0.8408	0 8378	0.8349
67	0.8566	0.8535	0·8505	0.8476
68	0.8694	0.8663	0.8632	0.8602
69	0.8821	0.8790	0.8759	0.8729
70	0.8949	0.8918	0.8886	0.8855
71	0.9077	0.9045	0.9013	0.8982
72	0.9205	0.9172	0.9140	0.9108
73	0.9333	0.9300	0 9267	0.9235
74	0.9461	0.9427	0.9394	0.9361
75	0.9588	0.9555	0.9521	0.9488
76	0.9716	0.9682	0.9648	0.9614
77	0.9844	0.9809	0.9775	0.9741
78	0.9972	0.9937	0.9902	0.9867
79	1.0100	1.0064	1.0029	0.9994
Diff.	0.0128	0.0127	0.0127	0.0127

TABLE V. — *(Suite).*

12° à 15°

h	Température			
	12°	13°	14°	15°
cm.				
20	0.2521	0.2512	0.2504	0.2495
21	0.2647	0.2638	0.2629	0.2620
22	0.2773	0.2764	0.2754	0.2744
23	0.2899	0.2889	0.2879	0.2869
24	0.3025	0.3015	0.3004	0.2994
25	0.3151	0.3140	0.3130	0.3119
26	0.3278	0.3266	0.3255	0.3243
27	0.3404	0.3392	0.3380	0.3368
28	0·3530	0.3517	0.3505	0.3493
29	0.3656	0.3643	0.3630	0.3618
30	0.3782	0.3769	0.3755	0.3742
31	0.3908	0.3894	0.3881	0.3867
32	0.4034	0.4020	0.4006	0.3992
33	0.4160	0.4145	0.4131	0.4117
34	0.4286	0.4271	0.4256	0.4241
35	0.4412	0.4397	0.4381	0.4366
36	0.4538	0.4522	0.4507	0.4491
37	0.4664	0.4648	0.4632	0.4616
38	0.4790	0.4774	0.4757	0.4740
39	0.4916	0.4899	0.4882	0.4865
40	0.5042	0.5025	0.5007	0.4990
41	0.5168	0.5150	0.5132	0.5115
42	0.5294	0.5276	0.5258	0.5239
43	0.5421	0.5402	0.5383	0.5364
44	0.5547	0.5527	0.5508	0.5489
45	0.5673	0.5653	0.5633	0.5614
46	0.5799	0.5778	0.5758	0.5738
47	0.5925	0.5904	0.5884	0.5863
48	0.6051	0.6030	0.6009	0.5988
49	0.6177	0.6155	0.6134	0.6113
Diff.	0.0126	0.0126	0.0125	0.0125

TABLE V. — *(Suite).*

12° à 15°

h	Température			
	12°	13°	14°	15°
m.				
50	0.6303	0.6281	0.6259	0.6237
51	0.6429	0.6407	0.6384	0.6362
52	0.6555	0.6532	0.6510	0.6487
53	0.6681	0.6658	0.6635	0.6612
54	0.6807	0.6783	0.6760	0.6736
55	0.6933	0.6909	0.6885	0.6861
56	0.7059	0.7035	0.7010	0.6986
57	0.7185	0.7160	0.7135	0.7111
58	0.7311	0.7286	0.7261	0.7235
59	0.7437	0.7412	0.7386	0.7360
60	0.7563	0.7537	0.7511	0.7485
61	0.7690	0.7663	0.7636	0.7610
62	0.7816	0.7788	0.7761	0.7734
63	0.7942	0.7914	0.7887	0.7859
64	0.8068	0.8040	0.8012	0.7984
65	0.8194	0.8165	0.8137	0.8109
66	0.8320	0.8291	0.8262	0.8233
67	0.8446	0.8416	0.8387	0.8358
68	0.8572	0.8542	0.8512	0.8483
69	0.8698	0.8668	0.8638	0.8608
70	0.8824	0.8793	0.8763	0.8732
71	0.8950	0.8919	0.8888	0.8857
72	0.9076	0.9045	0.9013	0.8982
73	0.9202	0.9170	0.9138	0.9107
74	0.9328	0.9296	0.9264	0.9231
75	0.9454	0.9421	0.9389	0.9356
76	0.9580	0.9547	0.9514	0.9481
77	0.9706	0.9673	0.9639	0.9606
78	0.9833	0.9798	0.9764	0.9730
79	0.9959	0.9924	0.9889	0.9855
Diff.	0.0126	0.0126	0.0125	0.0125

TABLE V. — *(Suite).*

16° à 19° .

h	Température			
	16°	17°	18°	19°
cm.				
20	0.2486	0.2478	0.2469	0.2461
21	0.2611	0.2602	0.2593	0.2584
22	0.2735	0.2726	0.2716	0.2707
23	0.2859	0.2850	0.2840	0.2830
24	0.2984	0.2973	0.2963	0.2953
25	0.3108	0.3097	0.3087	0.3076
26	0.3232	0.3221	0.3210	0.3199
27	0.3357	0.3345	0.3334	0.3332
28	0.3481	0.3469	0.3457	0.3445
29	0.3605	0.3593	0.3581	0.3568
30	0.3730	0.3717	0.3704	0.3691
31	0.3854	0.3841	0.3828	0.3814
32	0.3978	0.3965	0.3951	0.3937
33	0.4103	0.4088	0.4074	0.4061
34	0.4227	0.4212	0.4198	0.4184
35	0.4351	0.4336	0.4321	0.4307
36	0.4476	0.4460	0.4445	0.4430
37	0.4600	0.4584	0.4568	0.4553
38	0.4724	0.4708	0.4692	0.4676
39	0.4848	0.4832	0.4815	0.4799
40	0.4973	0.4956	0.4939	0.4922
41	0.5097	0.5080	0.5062	0.5045
42	0.5221	0.5203	0.5186	0.5168
43	0.5346	0.5327	0.5309	0.5291
44	0.5470	0.5451	0.5433	0.5414
45	0.5594	0.5575	0.5556	0.5537
46	0.5719	0.5699	0.5680	0.5660
47	0.5843	0.5823	0.5803	0.5783
48	0.5967	0.5947	0.5926	0.5906
49	0.6092	0.6071	0.6050	0.6029
Diff.	0.0124	0.0124	0.0123	0.0123

TABLE V. — *(Suite).*

16° à 19°

h	Température			
	16°	17°	18°	19°
cm.				
50	0.6216	0.6195	0.6173	0.6152
51	0.6340	0.6319	0.6297	0.6275
52	0.6465	0.6442	0.6420	0.6398
53	0.6589	0.6566	0.6544	0.6521
54	0.6713	0.6690	0.6667	0.6645
55	0.6838	0.6814	0.6791	0.6768
56	0.6962	0.6938	0.6914	0.6891
57	0.7086	0.7062	0.7038	0.7014
58	0.7211	0.7186	0.7161	0.7137
59	0.7335	0.7310	0.7285	0.7260
60	0.7459	0.7434	0.7408	0.7383
61	0.7583	0.7557	0.7532	0.7506
62	0.7708	0.7681	0.7655	0.7629
63	0.7832	0.7805	0.7778	0.7752
64	0.7956	0.7929	0.7902	0.7875
65	0.8081	0.8053	0.8025	0.7998
66	0.8205	0.8177	0.8149	0.8121
67	0.8329	0.8301	0.8272	0.8244
68	0.8454	0.8425	0.8396	0.8367
69	0.8578	0.8549	0.8519	0.8490
70	0.8702	0.8672	0.8643	0.8613
71	0.8827	0.8796	0.8766	0.8736
72	0.8951	0.8920	0.8890	0.8859
73	0.9075	0.9044	0.9013	0.8982
74	0.9200	0.9168	0.9137	0.9105
75	0.9324	0.9292	0.9260	0.9228
76	0.9448	0.9416	0.9384	0.9352
77	0.9573	0.9540	0.9507	0.9475
78	0.9697	0.9664	0.9660	0.9598
79	0.9821	0.9787	0.9754	0.9721
Diff.	0.0124	0.0124	0.0123	0.0123

TABLE V. — *(Suite).*

20° à 23°

h	Température			
	20°	21°	22°	23°
cm.				
20	0.2453	0.2444	0.2436	0.2428
21	0.2575	0.2566	0.2558	0.2549
22	0.2698	0.2689	0.2680	0.2671
23	0.2820	0.2811	0.2801	0.2792
24	0.2943	0.2933	0.2923	0.2913
25	0.3066	0.3055	0.3045	0.3035
26	0.3188	0.3177	0.3167	0.3156
27	0.3311	0.3300	0.3289	0.3277
28	0.3434	0.3422	0.3410	0.3399
29	0.3556	0.3544	0.3532	0.3520
30	0.3679	0.3666	0 3654	0.3642
31	0.3801	0.3789	0.3776	0.3763
32	0.3924	0.3911	0.3898	0.3884
33	0.4047	0.4033	0.4019	0.4006
34	0.4169	0.4155	0.4141	0.4127
35	0.4292	0.4277	0.4263	0.4249
36	0.4415	0.4400	0.4385	0.4370
37	0.4537	0.4522	0.4507	0.4491
38	0.4660	0.4644	0.4628	0.4613
39	0.4782	0.4766	0.4750	0.4734
40	0.4905	0.4888	0.4872	0.4855
41	0.5028	0.5011	0.4994	0.4977
42	0.5150	0.5133	0.5116	0.5098
43	0.5273	0.5255	0.5237	0.5220
44	0.5396	0.5377	0.5359	0.5341
45	0.5518	0.5499	0.5481	0.5462
46	0.5641	0.5622	0.5603	0.5584
47	0.5764	0.5744	0.5725	0.5705
48	0.5886	0.5866	0.5846	0.5827
49	0.6009	0.5988	0.5968	0.5948
Diff.	0.0123	0.0122	0.0122	0.0121

TABLE V. — *(Suite).*

20° à 23°

h	Température			
	20°	21°	22°	23°
cm.				
50	0.6131	0.6111	0.6090	0.6069
51	0.6254	0.6233	0.6212	0.6191
52	0.6377	0.6355	0.6334	0.6312
53	0.6499	0.6477	0.6455	0.6434
54	0.6622	0.6599	0.6577	0.6555
55	0.6745	0.6722	0.6699	0.6676
56	0.6867	0.6844	0.6821	0.6798
57	0.6990	0.6966	0.6942	0.6919
58	0.7112	0.7088	0.7064	0.7041
59	0.7235	0.7211	0.7186	0.7162
60	0.7358	0.7333	0.7308	0.7283
61	0.7480	0.7455	0.7430	0.7405
62	0.7603	0.7577	0.7552	0.7526
63	0.7726	0.7699	0.7673	0.7648
64	0.7848	0.7822	0.7795	0.7769
65	0.7971	0.7944	0.7917	0.7890
66	0·8093	0.8066	0.8039	0.8012
67	0.8216	0.8188	0.8161	0.8133
68	0.8339	0.8310	0.8282	0.8254
69	0.8461	0.8433	0.8404	0.8376
70	0.8584	0.8555	0.8526	0.8497
71	0.8707	0.8677	0.8648	0.8619
72	0.8829	0.8799	0.8770	0.8740
73	0.8952	0.8921	0.8891	0.8861
74	0.9074	0.9044	0.9013	0.8983
75	0.9197	0.9166	0.9135	0.9104
76	0.9320	0.9288	0.9257	0.9226
77	0.9442	0.9410	0.9379	0.9347
78	0.9565	0.9533	0.9500	0.9468
79	0.9688	0.9655	0.9622	0.9590
Diff.	0.0123	0.0122	0.0122	0.0121

TABLE V. — *(Suite).*

24° à 27°

h	Température			
	24°	25°	26°	27°
cm.				
20	0.2420	0.2412	0.2404	0.2395
21	0.2541	0.2532	0.2524	0.2515
22	0.2662	0.2653	0.2644	0.2635
23	0.2783	0.2773	0.2764	0.2755
24	0.2904	0.2894	0.2884	0.2875
25	0.3025	0.3014	0.3004	0.2994
26	0.3146	0.3135	0.3125	0.3114
27	0.3266	0.3256	0.3245	0.3234
28	0.3387	0.3376	0.3365	0.3354
29	0.3508	0.3497	0.3485	0.3474
30	0.3629	0.3617	0.3605	0.3593
31	0.3750	0.3738	0.3725	0.3713
32	0.3871	0.3858	0.3846	0.3833
33	0.3992	0.3979	0.3966	0.3953
34	0.4113	0.4100	0.4086	0.4072
35	0.4234	0.4220	0.4206	0.4192
36	0.4355	0.4341	0.4326	0.4312
37	0.4476	0.4461	0.4446	0.4432
38	0.4597	0.4582	0.4567	0.4551
39	0.4718	0.4703	0.4687	0.4671
40	0.4839	0.4823	0.4807	0.4791
41	0.4960	0.4944	0.4927	0.4911
42	0.5081	0.5064	0.5047	0.5031
43	0.5202	0.5185	0.5168	0.5150
44	0.5323	0.5305	0.5288	0.5270
45	0.5444	0.5426	0.5408	0.5390
46	0.5565	0.5547	0.5528	0.5510
47	0.5686	0.5667	0.5648	0.5629
48	0.5807	0.5788	0.5768	0.5749
49	0.5928	0.5908	0.5889	0.5869
Diff.	0.0121	0.0121	0.0120	0.0120

TABLE V. — *(Suite).*

24° à 27°

h	Température			
	24°	25°	26°	27°
cm.				
50	0.6049	0.6029	0.6009	0.5989
51	0.6170	0.6149	0.6129	0.6109
52	0.6291	0.6270	0.6249	0.6228
53	0.6412	0.6391	0.6369	0.6348
54	0.6533	0.6511	0.6489	0.6468
55	0.6654	0.6632	0.6610	0.6588
56	0.6775	0.6752	0.6730	0.6707
57	0.6896	0.6873	0.6850	0.6827
58	0.7017	0.6993	0.6970	0.6947
59	0.7138	0.7114	0.7090	0.7067
60	0.7259	0.7235	0.7210	0.7187
61	0.7380	0.7355	0.7331	0.7306
62	0.7501	0.7476	0.7451	0.7426
63	0.7622	0.7596	0.7571	0.7546
64	0.7743	0.7717	0.7691	0.7666
65	0.7864	0.7837	0.7811	0.7785
66	0.7985	0.7958	0.7932	0.7905
67	0.8106	0.8079	0.8052	0.8025
68	0.8227	0.8199	0.8172	0.8145
69	0.8348	0.8320	0.8292	0.8265
70	0.8469	0.8440	0.8412	0.8384
71	0.8590	0.8561	0.8532	0.8504
72	0.8711	0.8681	0.8653	0.8624
73	0.8832	0.8802	0.8773	0.8744
74	0.8953	0.8923	0.8893	0.8863
75	0.9074	0.9043	0.9013	0.8983
76	0.9195	0.9164	0.9133	0.9103
77	0.9316	0.9284	0.9253	0.9223
78	0.9437	0.9405	0.9374	0.9343
79	0.9557	0.9526	0.9494	0.9462
Diff.	0.0121	0.0121	0.0120	0.0120

TABLE V. — *(Suite).*

28° à 31°

h	Température			
	28°	29°	30°	31°
cm.				
20	0.2388	0.2380	0.2372	0.2364
21	0.2507	0.2499	0.2490	0.2482
22	0.2626	0.2618	0.2609	0.2601
23	0.2746	0.2737	0.2728	0.2719
24	0.2865	0.2856	0.2846	0.2837
25	0.2984	0.2975	0.2965	0.2955
26	0.3104	0.3094	0.3083	0.3073
27	0.3223	0.3213	0.3202	0.3192
28	0.3343	0.3332	0.3321	0.3310
29	0.3462	0.3450	0.3439	0.3428
30	0.3581	0.3570	0.3558	0.3546
31	0.3701	0.3688	0.3676	0.3664
32	0.3820	0.3807	0.3795	5.3783
33	0.3939	0.3926	0.3914	0.3901
34	0.4059	0.4045	0.4032	0.4019
35	0.4178	0.4164	0.4151	0.4137
36	0.4298	0.4283	0.4269	0.4255
37	0.4417	0.4402	0.4388	0.4374
38	0.4536	0.4521	0.4506	0.4492
39	0.4656	0.4640	0.4625	0.4610
40	0.4775	0.4759	0.4744	0.4728
41	0.4894	0.4878	0.4862	0.4846
42	0.5014	0.4997	0.4981	0.4964
43	0.5133	0.5116	0.5100	0.5083
44	0.5253	0.5235	0.5218	0.5201
45	0.5372	0.5354	0.5337	0.5319
46	0.5491	0.5473	0.5455	0.5437
47	0.5611	0.5592	0.5574	0.5556
48	0.5730	0.5711	0.5693	0.5674
49	0.5850	0.5830	0.5811	0.5792
Diff.	0.0119	0.0119	0.0119	0.0118

TABLE V. — *(Suite).*

28° à 31°

h	Température			
	28°	29°	30°	31°
cm.				
50	0.5969	0.5949	0.5930	0.5910
51	0.6088	0.6068	0.6048	0.6028
52	0.6208	0.6187	0.6167	0.6147
53	0.6327	0.6306	0.6285	0.6265
54	0.6446	0.6425	0.6404	0.6383
55	0.6566	0.6544	0.6523	0.6501
56	0.6685	0.6663	0.6641	0.6619
57	0.6805	0.6782	0.6760	0.6738
58	0.6924	0.6901	0.6878	0.6856
59	0.7043	0.7020	0.6997	0.6974
60	0.7163	0.7139	0.7116	0.7092
61	0.7282	0.7258	0.7234	0.7211
62	0.7402	0.7377	0.7353	0.7329
63	0.7521	0.7496	0.7471	0.7447
64	0.7640	0.7615	0.7590	0.7565
65	0.7760	0.7734	0.7709	0.7683
66	0.7879	0.7853	0.7827	0.7802
67	0.7998	0.7972	0.7946	0.7920
68	0.8118	0.8091	0.8064	0.8038
69	0.8237	0.8210	0.8183	0.8156
70	0.8357	0.8329	0.8302	0.8274
71	0.8476	0.8448	0.8420	0.8393
72	0.8595	0.8567	0.8538	0.8511
73	0.8714	0.8686	0.8657	0.8629
74	0.8834	0.8805	0.8776	0.8747
75	0.8953	0.8924	0.8895	0.8865
76	0.9073	0.9042	0.9013	0.8984
77	0.9192	0.9162	0.9132	0.9102
78	0.9312	0.9281	0.9250	0.9220
79	0.9431	0.9400	0.9369	0.9338
Diff.	0.0119	0.0119	0.0119	0.0118

TABLE V. — *(Suite).*

32° à 35°

h	Température			
	32°	33°	34°	35°
cm.				
20	0.2356	0.2349	0.2341	0.2333
21	0.2474	0.2466	0.2458	0.2450
22	0.2592	0.2584	0.2575	0.2567
23	0.2710	0.2701	0.2692	0.2683
24	0.2828	0.2818	0.2809	0.2800
25	0.2945	0.2936	0.2926	0.2917
26	0.3063	0.3053	0.3043	0.3034
27	0.3181	0.3171	0.3160	0.3150
28	0.3299	0.3288	0.3277	0.3267
29	0.3417	0.3406	0.3395	0.3384
30	0.3535	0.3523	0.3512	0.3500
31	0.3652	0.3640	0.3629	0.3617
32	0.3770	0.3758	0.3746	0.3734
33	0.3888	0.3875	0.3863	0.3850
34	0.4006	0.3993	0.3980	0.3967
35	0.4124	0.4110	0.4097	0.4084
36	0.4242	0.4228	0.4214	0.4200
37	0.4359	0.4345	0.4331	0.4317
38	0.4477	0.4463	0.4448	0.4434
39	0.4595	0.4580	0.4565	0.4550
40	0.4713	0.4697	0.4682	0.4667
41	0.4831	0.4815	0.4799	0.4784
42	0.4948	0.4932	0.4916	0.4900
43	0.5066	0.5050	0.5033	0.5017
44	0.5184	0.5167	0.5150	0.5134
45	0.5302	0.5285	0.5267	0.5250
46	0.5420	0.5402	0.5384	0.5367
47	0.5538	0.5519	0.5501	0.5484
48	0.5655	0.5637	0.5618	0.5600
49	0.5773	0.5754	0.5736	0.5717
Diff.	0.0118	0.0117	0.0117	0.0117

TABLE V. — *(Suite).*

32° à 35°

h	Température			
	32°	33°	34°	35°
m.				
50	0.5891	0.5872	0.5853	0.5834
51	0.6009	0.5989	0.5970	0.5950
52	0.6127	0.6107	0.6087	0.6067
53	0.6244	0.6224	0.6204	0.6184
54	0.6362	0.6341	0.6321	0.6300
55	0.6480	0.6459	0.6438	0.6417
56	0.6598	0.6576	0.6555	0.6534
57	0.6716	0.6694	0.6672	0.6650
58	0.6834	0.6811	0.6789	0.6767
59	0.6951	0.6929	0.6906	0.6884
60	0.7069	0.7046	0.7023	0.7001
61	0.7187	0.7164	0.7140	0.7117
62	0.7305	0.7281	0.7257	0.7234
63	0.7423	0.7398	0.7374	0.7351
64	0.7540	0.7516	0.7491	0.7467
65	0.7658	0.7633	0.7608	0.7584
66	0.7776	0.7751	0.7725	0.7701
67	0.7894	0.7868	0.7842	0.7817
68	0.8012	0.7986	0.7959	0.7934
69	0.8129	0.8103	0.8076	0.8051
70	0.8247	0.8220	0.8194	0.8167
71	0.8365	0.8338	0.8311	0.8284
72	0.8483	0.8455	0.8428	0.8401
73	0.8601	0.8573	0.8545	0.8517
74	0.8719	0.8690	0.8662	0.8634
75	0.8836	0.8808	0.8779	0.8751
76	0.8954	0.8925	0.8896	0.8867
77	0.9072	0.9042	0.9013	0.8984
78	0.9190	0.9160	0.9130	0.9101
79	0.9308	0.9277	0.9247	0.9217
Diff.	0.0118	0.0117	0.0117	0.0117

TABLE V. — *(Suite).*

36° à 39°

h	Température			
	36°	37°	38°	39°
cm.				
20	0.2326	0.2318	0.2311	0.2304
21	0.2442	0.2434	0.2427	0.2419
22	0.2559	0.2550	0.2542	0.2534
23	0.2675	0.2666	0.2658	0.2649
24	0.2791	0.2782	0.2773	0.2764
25	0.2907	0.2898	0.2889	0.2880
26	0.3024	0.3014	0.3004	0.2995
27	0.3140	0.3130	0.3120	0.3110
28	0.3256	0.3246	0.3235	0.3225
29	0.3373	0.3362	0.3351	0.3340
30	0.3489	0.3478	0.3467	0.3455
31	0.3605	0.3594	0.3582	0.3571
32	0.3722	0.3709	0.3698	0.3686
33	0.3838	0.3825	0.3813	0.3801
34	0.3954	0.3941	0.3929	0.3916
35	0.4070	0.4057	0.4044	0.4031
36	0.4187	0.4173	0.4160	0.4147
37	0.4303	0.4289	0.4275	0.4262
38	0.4419	0.4405	0.4391	0.4377
39	0.4536	0.4521	0.4506	0.4492
40	0.4652	0.4637	0.4622	0.4607
41	0.4768	0.4753	0.4738	0.4723
42	0.4885	0.4869	0.4853	0.4838
43	0.5001	0.4985	0.4969	0.4953
44	0.5117	0.5101	0.5084	0.5068
45	0.5233	0.5216	0.5200	0.5183
46	0.5350	0.5332	0.5315	0.5298
47	0.5466	0.5448	0.5431	0.5414
48	0.5582	0.5564	0.5546	0.5529
49	0.5699	0.5680	0.5662	0.5644
Diff.	0.0116	0.0116	0.0116	0.0115

TABLE V. — *(Suite).*

36° à 39°

h	Température			
	36°	37°	38°	39°
cm.				
50	0.5815	0.5796	0.5778	0.5759
51	0.5931	0.5912	0.5893	0.5874
52	0.6048	0.6028	0.6009	0.5989
53	0.6164	0.6144	0.6124	0.6105
54	0.6280	0.6260	0.6240	0.6220
55	0.6396	0.6376	0.6355	0.6335
56	0.6513	0.6492	0.6471	0.6450
57	0.6629	0.6608	0.6586	0.6565
58	0.6745	0.6723	0.6702	0.6680
59	0.6862	0.6839	0.6818	0.6796
60	0.6978	0.6955	0.6933	0.6911
61	0.7094	0.7071	0.7049	0.7026
62	0.7211	0.7187	0.7164	0.7141
63	0.7327	0.7303	0.7280	0.7256
64	0.7443	0.7419	0.7395	0.7372
65	0.7559	0.7535	0.7511	0.7487
66	0.7676	0.7651	0.7626	0.7602
67	0.7792	0.7767	0.7742	0.7717
68	0.7908	0.7883	0.7857	0.7833
69	0.8025	0.7999	0.7973	0.7948
70	0.8141	0.8115	0.8089	0.8063
71	0.8257	0.8231	0.8204	0.8178
72	0.8374	0.8346	0.8320	0.8293
73	0.8490	0.8462	0.8435	0.8408
74	0.8606	0.8578	0.8551	0.8523
75	0.8722	0.8694	0.8666	0.8639
76	0.8839	0.8810	0.8782	0.8754
77	0.8955	0.8926	0.8897	0.8869
78	0.9071	0.9042	0.9013	0.8984
79	0.9188	0.9158	0.9129	0.9100
Diff.	0.0116	0.0116	0.0116	0.0115

TABLE VI.

Correction pour la diminution de la pesanteur dans la verticale entre les deux stations.

$A = (0.000\,005\,73)\, t\varpi + (0.000\,000\,098)\, \varpi^2$. t, température augmentée de 274°.

(Lorsque la station supérieure, ainsi qu'il arrive dans un voyage aérostatique, n'est point sur la surface de la terre, les nombres inscrits dans la table doivent être augmentés de 0.6 de leur valeur).

HAUTEUR approchée ϖ	Température						
	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
100	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
200	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4	0.4
300	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
400	0.6	0.6	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7
500	0.8	0.8	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9
600	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.1	1.1
700	1.1	1.1	1.1	1.2	1.2	1.3	1.3
800	1.2	1.3	1.3	1.4	1.4	1.5	1.5
900	1.4	1.4	1.5	1.5	1.6	1.6	1.7
1000	1.6	1.6	1.7	1.7	1.8	1.8	1.9
1100	1.7	1.8	1.8	1.9	2.0	2.0	2.1
1200	1.9	2.0	2.0	2.1	2.2	2.2	2.3
1300	2.1	2.1	2.2	2.3	2.4	2.4	2.5
1400	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.6	2.7
1500	2.4	2.5	2.6	2.7	2.7	2.8	2.9
1600	2.6	2.7	2.8	2.9	2.9	3.0	3.1
1700	2.8	2.9	3.0	3.1	3.1	3.2	3.3
1800	2.9	3.0	3.1	3.2	3.4	3.5	3.6
1900	3.1	3.2	3.3	3.4	3.6	3.7	3.8
2000	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	3.9	4.0
2100	3.5	3.6	3.7	3.8	4.0	4.1	4.2
2200	3.7	3.8	3.9	4.1	4.2	4.3	4.4
2300	3.9	4.0	4.1	4.3	4.4	4.5	4.7
2400	4.1	4.2	4.3	4.5	4.6	4.7	4.9
2500	4.2	4.4	4.5	4.7	4.8	5.0	5.1

TABLE VI. — *(Suite).*

HAUTEUR approchée x	Température						
	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
2600	4.4	4.6	4.7	4.9	5.0	5.2	5.3
2700	4.7	4.8	5.0	5.1	5.3	5.4	5.6
2800	4.9	5.0	5.2	5.3	5.5	5.7	5.8
2900	5.1	5.2	5.4	5.6	5.7	5.9	6.1
3000	5.3	5.4	5.6	5.8	5.9	6.1	6.3
3100	5.5	5.6	5.8	6.0	6.2	6.4	6.5
3200	5.7	5.9	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8
3300	5.9	6.1	6.3	6.4	6.6	6.8	7.1
3400	6.1	6.3	6.5	6.7	6.9	7.1	7.3
3500	6.3	6.5	6.7	6.9	7.1	7.3	7.5
3600	6.5	6.7	6.9	7.1	7.3	7.6	7.8
3700	6.7	6.9	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0
3800	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.3
3900	7.2	7.4	7.6	7.8	8.1	8.3	8.5
4000	7.4	7.6	7.9	8.1	8.3	8.5	8.8
4100	7.6	7.9	8.1	8.3	8.6	8.8	9.0
4200	7.8	8.1	8.3	8.6	8.8	9.1	9.3
4300	8.0	8.3	8.6	8.8	9.1	9 3	9.6
4400	8.3	8.6	8.8	9.1	9.3	9.6	9.8
4500	8.5	8.8	9.1	9.3	9.6	9.8	10.1
4600	8.8	9.1	9.3	9.6	9.8	10.1	10.4
4700	9.0	9.3	9.6	9.8	10.1	10.4	10.6
4800	9.3	9.5	9.8	10.1	10.4	10.6	10.9
4900	9.5	9.8	10.1	10.3	10.6	11.0	11.2
5000	9.7	10.0	10.3	10.6	10.9	11.2	11.5

TABLE VI. — *(Suite).*

HAUTEUR approchée x	Température						
	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
5100	10.0	10.3	10.6	10.9	11.2	11.4	11.7
5200	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.0
5300	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.0	12.3
5400	10.7	11.0	11.3	11.7	12.0	12.3	12.6
5500	11.0	11.3	11.6	11.9	12.2	12.6	12.9
5600	11.2	11.6	11.9	12.2	12.5	12.8	13.2
5700	11.5	11.8	12.1	12.5	12.8	13.1	13.5
5800	11.7	12.1	12.4	12.7	13.1	13.4	13.7
5900	12.0	12.3	12.7	13.0	13.4	13.7	14.0
6000	12.3	12.6	13.0	13.3	13.6	14.0	14.3
6100	12.5	12.9	13.2	13.6	13.9	14.3	14.6
6200	12.8	13.2	13.5	13.9	14.2	14.6	14.9
6300	13.1	13.4	13.8	14.1	14.5	14.9	15.2
6400	13.3	13.7	14.1	14.4	14.8	15.2	15.5
6500	13.6	14.0	14.4	14.7	15.1	15.5	15.8
6600	13.9	14.3	14.6	15.0	15.4	15.8	16.2
6700	14.2	14.5	14.9	15.3	15.7	16.1	16.5
6800	14.4	14.8	15.2	15.6	16.0	16.4	16.8
6900	14.7	15.1	15.5	15.9	16.3	16.7	17.1
7000	15.0	15.4	15.8	16.2	16.6	17.0	17.4
7100	15.3	15.7	16.1	16.5	16.9	17.3	17.7
7200	15.6	16.0	16.4	16.8	17.2	17.6	18.0
7300	15.9	16.3	16.7	17.1	17.5	17.9	18.4
7400	16.2	16.6	17.0	17.4	17.8	18.3	18.7
7500	16.4	16.9	17.3	17.7	18.2	18.6	19.0

TABLE VI. — *(Suite).*

HAUTEUR approchée x	Température						
	−20°	−10°	0°	+10°	+20°	+30°	+40°
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
7600	16.7	17.2	17.6	18.0	18.5	18.9	19.3
7700	17.0	17.5	18.0	18.3	18.8	19.2	19.7
7800	17.3	17.8	18.2	18.7	19.1	19.6	20.0
7900	17.6	18.1	18.5	19.0	19.4	19.9	20.3
8000	17.9	18.4	18.8	19.3	19.8	20.2	20.7
8100	18.2	18.7	19.2	19.6	20.1	20.5	21.0
8200	18.5	19.0	19.5	19.9	20.4	20.7	21.4
8300	18.8	19.3	19.8	20.3	20.7	21.0	21.7
8400	19.1	19.6	20.1	20.6	21.1	21.4	22.0
8500	19.5	20.0	20.4	20.9	21.4	21.7	22.4
8600	19.8	20.3	20.8	21.3	21.7	22.1	22.7
8700	20.1	20.6	21.1	21.6	22.1	22.4	23.1
8800	20.4	20.9	21.4	21.9	22.4	22.8	23.4
8900	20.7	21.2	21.7	22.3	22.8	23.1	23.8
9000	21.0	21.6	22.1	22.6	23.1	23.5	24.1
9100	21.4	21.9	22.4	22.9	23.5	24.0	24.5
9200	21.7	22.2	22.7	23.3	23.8	24.3	24.9
9300	22.0	22.6	23.1	23.6	24.2	24.7	25.2
9400	22.3	22.9	23.4	24.0	24.5	25.0	25.6
9500	22.7	23.2	23.8	24.3	24.9	25.4	25.9
9600	23.0	23.6	24.1	24.7	25.2	25.8	26.3
9700	23.3	23.9	24.5	25.0	25.6	26.1	26.7
9800	23.7	24.2	24.8	25.4	26.0	26.5	27.1
9900	24.0	24.6	25.2	25.7	26.3	26.9	27.4
10000	24.4	24.9	25.5	26.1	26.7	27.2	27.8

Correction pour la diminution de

B =

HAUTEUR approchée x	Altitude de			
	1000m	2000m	3000m	4000m
m.	m.	m.	m.	m.
1000	0.2	0.4	0.6	0.8
2000	0.4	0.8	1.2	1.6
3000	0.6	1.2	1.8	2.4
4000	0.8	1.6	2.4	3.1
5000	1.0	2.0	2.9	3.9
6000	1.2	2.4	3.5	4.7
7000	1.4	2.7	4.1	
8000	1.6	3.1		
9000	1.8			

Lorsque la station inférieure, ainsi qu'il peut arriver dans une ascension aéros
de 0.6 de leur valeur.

Si l'altitude de la station inférieure est inconnue, on pourra l'évaluer av
la petite table ci-dessous :

Pression barométrique . centim.	67.5	59.5	52.5	46
Altitude . . . . . mètres	1000	2000	3000	400

II.

santeur à la station inférieure.

) X α.

ɪtion inférieure X				
5000^m	**6000^m**	**7000^m**	**8000^m**	**9000^m**
m.	m.	m.	m.	m.
1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
2.0	2.4	2.7	3.1	
2.9	3.5	4.1		
3.9	4.7			
4.9				

pas sur la surface de la terre, les nombres de cette table doivent être augmentés

ɪximation suffisante d'après la pression barométrique à cette station, au moyen de

40	**35**	**31**	**27.5**	**24.5**	**22.5**
5000	**6000**	**7000**	**8000**	**9000**	**10000**

TABLE

Correction pour la variati

Correction *positive* entre 0° et 45°; négat

HAUTEUR approchée x	Latitud				
	0° 90	5° 85	10° 80	15° 75	20° 70
mètres	mètres	mètres	mètres	mètres	mètres
1000	2.6	2.6	2.4	2.3	2.0
2000	5.2	5.1	4.9	4.5	4.0
3000	7.8	7.7	7.3	6.8	6.0
4000	10.4	10.2	9.8	9.0	8.0
5000	13.0	12.8	12.2	11.3	10.0
6000	15.6	15.4	14.7	13.5	12.0
7000	18.2	17.9	17.1	15.8	13.9
8000	20.8	20.5	19.5	18.0	15.9
9000	23.4	23.0	22.0	20.3	17.9
10000	26.0	25.6	24.4	22.5	19.9

III.

la pesanteur en latitude.

45° et 90°. $C = (0.0026)\, x \cos 2\lambda$.

25° 65	30° 60	35° 55	40° 50	45° 45	HAUTEUR approchée x
mètres	mètres	mètres	mètres	mètres	mètres
1.7	1.3	0.9	0.5	0	1000
3.3	2.6	1.8	0.9	0	2000
5.0	3.9	2.7	1.4	0	3000
6.7	5.2	3.6	1.8	0	4000
8.4	6.5	4.4	2.3	0	5000
10.0	7.8	5.3	2.7	0	6000
11.7	9.1	6.2	3.2	0	7000
13.4	10.4	7.1	3.6	0	8000
15.0	11.7	8.0	4.1	0	9000
16.7	13.0	8.9	4.5	0	10000

MESURE DES HAUTEURS

AU MOYEN D'UNE BASE VERTICALE.

DÉTERMINATION

DE LA HAUTEUR D'UNE MONTAGNE INACCESSIBLE

À L'AIDE DU BAROMÈTRE

ET D'UN INSTRUMENT POUR MESURER LES ANGLES.

(*The Alpine Journal*, vol. VI, N° 44, pag. 414).

On sait que la méthode ordinaire pour déterminer la hauteur d'une montagne inaccessible consiste à mesurer une base horizontale, et à prendre, à chacune de ses extrémités, l'angle que fait avec cette base la projection horizontale du rayon visuel dirigé vers le point dont on cherche la hauteur.

Une fois que la base a été mesurée, on connaît un côté et les deux angles adjacents du triangle dont le sommet est le pied de la verticale passant par la cime de la montagne; on peut dès lors calculer la distance d'une extrémité de la base au pied de cette verticale. La longueur obtenue, est le côté d'un triangle rectangle dans lequel la hauteur de la montagne au-dessus de la base est l'autre

côté, et dont on mesure d'ailleurs directement un angle, celui du rayon visuel, avec l'horizon. Le calcul de ce triangle rectangle donnera la hauteur cherchée.

Cette méthode présente des difficultés d'exécution telles, qu'un voyageur isolé ne saurait les surmonter, surtout dans un pays montagneux, où l'on trouve bien rarement un terrain uni permettant de tracer une base horizontale. La mesure directe d'une base est une opération longue et délicate qui exige l'emploi d'appareils coûteux.

Supposons qu'on n'ait ni le temps ni les moyens de mesurer une base horizontale, il s'agit de trouver la manière d'y suppléer.

Voici l'idée qui m'est venue et dont j'ai fait l'application à quelques cas pratiques. Au lieu d'une base horizontale, j'emploie une base verticale que je mesure à l'aide du baromètre. A cet effet, je prends deux points à des niveaux différents, et je détermine, au moyen d'un instrument pour mesurer les angles, l'inclinaison de la ligne droite qui les réunit, ainsi que leur différence de niveau, par le baromètre. De ces deux points, je dirige des rayons visuels vers le sommet de la montagne, et je mesure les angles que ces rayons font avec la verticale.

Si les deux points choisis ne sont point dans le même plan vertical que le sommet de la montagne, je mesure en outre les deux angles que fait le plan vertical contenant ces deux points, avec les plans verticaux contenant les deux rayons visuels dirigés vers le sommet de la montagne.

Soit *M* (fig. 1) le sommet de la montagne dont on veut trouver la hauteur. Je prends sur une montagne en face un point accessible *N*, et au fond de la vallée un autre point *O*. Je tire les trois rayons visuels *ON*, *OM*, *NM*, dont je mesure les distances zénithales

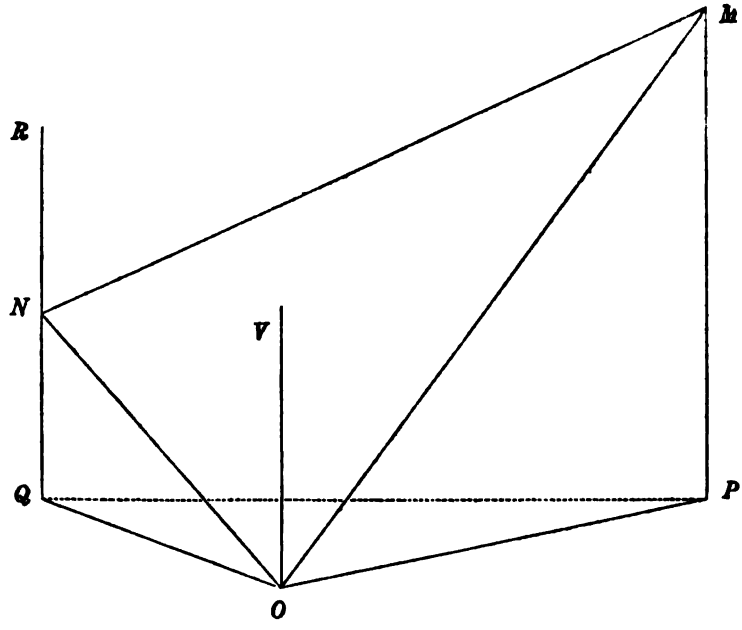


Fig. 1.

$$VON = \alpha\ , \qquad VOM = \beta\ , \qquad RNM = \gamma\ ,$$

et les angles horizontaux

$$PQO = \varphi\ , \qquad QOP = \psi\ .$$

A l'aide du baromètre, je détermine la différence de niveau

$$NQ = h\ .$$

Il s'agit de trouver

$$MP = H\ .$$

Dans le triangle rectangle NQO, on connaît un côté NQ et l'angle

$$ONQ = VON = \alpha ;$$

on pourra donc calculer l'hypothénuse

$$NO = \frac{h}{\cos \alpha} .$$

Maintenant, si l'on conçoit le triangle sphérique qui a pour côtés

$$RNM = \gamma ,$$

$$RNO = \pi - \alpha ,$$

et pour l'angle compris

$$PQO = \varphi ,$$

on trouve, pour le troisième côté MNO, d'après une formule connue de trigonométrie sphérique,

$$\cos MNO = \cos (\pi - \alpha) \cos \gamma + \sin (\pi - \alpha) \sin \gamma \cos \varphi ,$$

ou bien

$$\cos MNO = - \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos \varphi .$$

De même, le triangle sphérique ayant pour côtés

$$VON = \alpha ,$$

$$VOM = \beta ,$$

et pour l'angle compris

$$QOP = \psi ,$$

donne, pour le côté MON,

$$\cos MON = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos\psi .$$

Dans le triangle rectiligne MNO, on connaît le côté NO et les deux angles adjacents; on pourra donc calculer le côté OM, au moyen de la proportion

$$NO : OM :: \sin(MNO + MON) : \sin MNO ;$$

d'où l'on tire, en mettant pour NO sa valeur trouvée plus haut,

$$OM = \frac{h}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin MNO}{\sin(MNO + MON)} .$$

Enfin, le triangle rectangle MOP donnera, pour la hauteur cherchée,

$$MP = H = h \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin MNO}{\sin(MNO + MON)} .$$

Ordinairement, on peut prendre les deux points N et O de manière qu'ils soient compris dans un même plan vertical que le sommet M de la montagne. On a alors

$$\varphi = 0 , \qquad \psi = \pi ,$$

et par suite

$$\cos MNO = -\cos\alpha \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma = -\cos(\alpha + \gamma) ,$$

$$\cos MON = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha + \beta) ;$$

d'où l'on déduit

$$MNO = \pi - \alpha - \gamma ,$$

$$MON = \alpha + \beta ,$$

et par suite

$$MNO + MON = \pi - \gamma + \beta .$$

Dans ce cas, la hauteur cherchée devient

[1] $$H = h \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin(\gamma-\beta)} .$$

On pourrait arriver directement, avec toute facilité, à cette expression, en raisonnant sur la fig. 2, sans passer par le cas plus général.

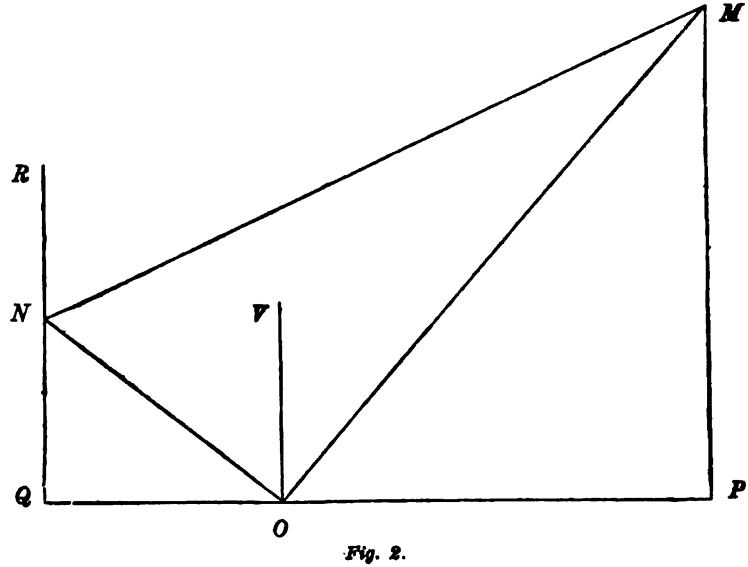


Fig. 2.

APPLICATIONS.

1er Exemple.

Hauteur de la Croix de Chabrière. — Près de Bardonnèche, presque à l'extrémité du contre-fort qui sépare le vallon de Rochemolle de celui de Merdovine, contre-fort que traverse le grand tunnel de Bardonnèche à Modane, est plantée une croix qu'on aperçoit de tout le bassin de Bardonnèche et qu'on nomme Croix de Chabrière.

Afin de mesurer la hauteur de cette Croix, je choisis deux points accessibles: l'un, sur le contre-fort séparant la Vallée-Étroite du vallon de la Rho, à un endroit nommé Trois-Croix; l'autre, à l'intersection du chemin conduisant au col de Fréjus avec le plan vertical contenant la Croix de Chabrière et les Troix-Croix. Je marquai ce point par un jalon.

Les observations barométriques faites à ces points, comparées à celles de l'Observatoire astronomique de Turin, donnèrent:

Jalon	Baromètre réduit à zéro	millim.	642,2
	Thermomètre libre .	degrés C.	20,7
Turin	Baromètre à zéro		739,9
	Thermomètre libre . . .		24,2
Trois-Croix . . .	Baromètre à zéro		599,6
	Thermomètre libre . . .		21,5
Turin	Baromètre à zéro		741,5
	Thermomètre libre . . .		27,5

Moyennes de deux observations.

Avec ces données, à l'aide des *Nouvelles tables hypsométriques* que j'ai publiées en 1867 (*), on trouve:

Hauteur du Jalon au-dessus de Turin	$1225^{m},3$
Hauteur des Trois-Croix	1848, 0
Hauteur des Trois-Croix au-dessus du Jalon .	$h = 622, 7$

Les mesures angulaires (**) fournirent:

Distance zénithale des Trois-Croix vues du Jalon (division centésimale)	$\alpha = 81^{g},78$
Distance zénithale de la Croix de Chabrière vue du Jalon	$\beta = 80, 35$
Distance zénithale de la Croix de Chabrière vue des Trois-Croix	$\gamma = 98, 70$

En mettant ces données dans la formule [1], on obtient

$$\log H = \log h + 0,05789,$$

et par suite, d'après la valeur de h trouvée ci-dessus, il vient:

Hauteur de la Croix de Chabrière au-dessus du Jalon	$H = 711^{m},5$
Hauteur de la Croix de Chabrière au-dessus de l'Observatoire de Turin	1936, 8

(*) *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, Serie II, tomo XXV.*

J'emploie ces tables préférablement aux tables ordinaires fondées sur la formule de LAPLACE, parce que ces dernières donnent, ainsi que je l'ai fait voir ailleurs, des hauteurs trop fortes, lesquelles, étant encore augmentées par suite du procédé que je propose, finissent par conduire à des résultats exagérés.

(**) J'employai pour mesurer les angles un *Aba*, espèce de théodolite inventé par M. Antoine d'ABBADIE. Celui dont je me servis donne le dixième de degré centésimal (5'2'',4 de la division en 90°). C'est un charmant petit instrument, très-maniable, léger (3 k. 1/2) que je recommande aux voyageurs.

Je n'ai tenu compte, dans aucun des exemples, de la correction due à la réfraction atmosphérique et à la sphéricité de la terre, parce que cette correction n'atteint pas un dixième de degré.

Afin de contrôler ce résultat, je fis à la Croix de Chabrière trois observations barométriques dont la moyenne est

Croix de Chabrière . .	Baromètre à zéro . . .	590^{mm},8
	Thermomètre libre . .	15°, 7
Turin (Observatoire) .	Baromètre à zéro . . .	739, 2
	Thermomètre libre . .	25, 6

Avec ces données, on obtient

Hauteur de la Croix de Chabrière au-dessus de l'Observatoire de Turin . . . . . 1924^{m},7

La différence des deux résultats est de 12^{m},1. Comme la véritable hauteur de la Croix de Chabrière n'est pas connue, il peut se faire que cette différence doive être attribuée en partie à l'appréciation plus ou moins imparfaite de la hauteur de cette Croix, laquelle a été faite uniquement au moyen du baromètre.

2e Exemple.

Hauteur du Pelvo d'Elva. — Ce pic est situé sur le contre-fort qui sépare la vallée de Vraita de celle de Maira, entre les deux communes de Casteldelfino et d'Elva. Pour le mesurer, je choisis deux points dans le même plan vertical que le sommet: l'un, sur les ruines du Château de Casteldelfino (*); l'autre, dans l'*Elvé* (**), sur la montagne en face, à un endroit nommé Plan des Gorges.

(*) L'expérience m'a démontré que le meilleur signal pour la station inférieure est un drap de lit étendu par terre et assujetti par des pierres. Il est facile, en se servant d'un fil à plomb, et en parcourant la pente de la montagne faisant face au sommet dont on demande la hauteur, de trouver un point compris dans un même plan vertical que ce sommet et le signal inférieur. Il n'est pas nécessaire de placer un signal à la station supérieure, pourvu qu'on ait le soin de mesurer, en ce point, la distance zénithale du signal inférieur.

(**) C'est une forêt de pins de l'espèce *Pinus Cembra, Linn.* qu'on appelle *Elvo*, dans ces vallées.

Les observations barométriques donnèrent:

Château	Baromètre à zéro . . .	654^{mm}, 0	Moyennes de cinq observations.
	Thermomètre libre . .	16°, 3	
Turin (Observatoire)	Baromètre à zéro . . .	738, 4	
	Thermomètre libre . .	22, 6	
Plan des Gorges	Baromètre à zéro . . .	586, 5	
	Thermomètre libre . .	12, 0	
Turin (Observatoire)	Baromètre à zéro . . .	740, 3	
	Thermomètre libre . .	24, 3	

On en déduit:

Hauteur du Château de Casteldelfino au-dessus de Turin . . . . . 1040^{m}, 1
Hauteur du Plan des Gorges au-dessus de Turin 1979, 6
Hauteur du Plan des Gorges au-dessus du Château 939, 5

Les mesures angulaires fournirent:

Distance zénithale du Pelvo vu du Château . $\alpha = 82°, 3$
Distance zénithale du Plan des Gorges, vu du Château . . . . . $\beta = 78, 1$
Distance zénithale du Pelvo, vu du Plan des Gorges . . . . . $\gamma = 93, 7$

Au moyen de ces données, on obtient, par la formule [1],

$$\log H = \log h + 0,27059,$$

et par suite:

Hauteur du Pelvo d'Elva au-dessus du Château $H = 1751^{m}, 8$
Hauteur du Pelvo au-dessus de l'Observatoire de Turin 2791, 9
En ajoutant la hauteur de cet Observatoire, soit 276
on obtient pour l'altitude du Pelvo d'Elva 3067, 9

Dans la Carte de l'État-Major Piémontais, au $^1/_{50000}$, on trouve 3064^m pour l'altitude de ce Pic. Une observation barométrique que j'y ai faite, en 1864, m'a donné 3083^m. Ici l'accord est très-satisfaisant.

3^{me} Exemple.

Hauteur du mont Viso. — Pour mesurer la hauteur de ce Pic, je choisis deux points dans un même plan vertical que lui: le premier, sur les ruines du Château de Casteldelfino, le même que dans l'exemple précédent; le second, sur la crête qui fait suite au Pelvo d'Elva. Ce point résulta très-près du Col de la Bicocca, ou d'Elva.

Les observations barométriques au Col d'Elva fournirent:

Col d'Elva	Baromètre à zéro . . .	579^{mm},5
	Thermomètre libre . .	15°, 5
Turin	Baromètre à zéro . . .	734, 9
	Thermomètre libre . .	22, 7

De ces données on déduit

Hauteur du Col d'Elva au-dessus de Turin . . 2028^m,2

Dans le 2^{me} exemple, on a trouvé 1040^m,1, pour la hauteur du Château au-dessus de Turin; par conséquent on a

Hauteur du Col d'Elva au-dessus du Château . . 988,1

Les mesures angulaires donnèrent les résultats suivants:

Distance zénithale du Col d'Elva vu du Château $\alpha = 75°,6$
Distance zénithale du mont Viso vu du Château $\beta = 82,7$
Distance zénithale du mont Viso vu du Col d'Elva $\gamma = 91,4$

Avec ces données, on trouve

$$\log H = \log h + 0,41670.$$

En remplaçant h par sa valeur ci-dessus, il vient

$$H = 2579^{m},3.$$

Ainsi la hauteur du mont Viso au-dessus de Turin résulte de $3619^{m},4$, et au-dessus de la mer, de $3895^{m},4$.

La carte de l'État-Major, au $^{1}/_{50000}$, porte cette altitude à 3840^{m}. M. MATHEWS a trouvé 3861^{m}, à l'aide du baromètre, en 1861. M. TUCKETT, 3850^{m}, en 1862. J'ai trouvé 3852^{m}, en 1863.

L'excès de l'altitude que donne la méthode dont il est ici question, peut être attribué en partie à la dépression barométrique qui devait exister au Col d'Elva au moment de l'observation, dépression qu'indiquait la marche des brouillards montant de tous les côtés, qui finirent par m'envelopper, en m'empêchant de répéter la mesure des angles. Cette circonstance a dû produire une estimation trop élevée du Col d'Elva. Il aurait suffi que le baromètre se fût tenu plus haut d'un millimètre ou deux, pour mettre d'accord l'altitude calculée du mont Viso avec les altitudes trouvées précédemment.

La mesure de la différence de niveau des deux stations, d'où l'on fait partir les rayons visuels, doit être faite avec grand soin, attendu que l'erreur commise sur cette hauteur se trouve multipliée dans la hauteur qu'on cherche. Aussi sera-t-il bon de répéter plusieurs fois les observations barométriques faites simultanément en ces deux points. C'est ce que je regrette de n'avoir pas fait dans les applications

rapportées ci-dessus. Le manque d'une personne pour observer simultanément le baromètre à l'autre station, et le temps trouble m'empêchèrent de faire mieux. Pour suppléer aux observations simultanées aux deux stations, j'ai été obligé de rapporter toutes mes observations à l'Observatoire de Turin, éloigné de plus de 100 kilomètres.

Malgré ces circonstances peu favorables, les résultats obtenus sont assez satisfaisants pour que je me permette de signaler la méthode que je propose à l'attention des personnes qui s'occupent d'hypsométrie.

Note. J'espère pouvoir bientôt proposer, comme complément de cette méthode, une lunette pour mesurer les angles verticaux, sans cercle gradué, donnant la tangente des angles d'élévation. Alors tous les instruments pour mesurer une montagne inaccessible se réduiront au baromètre et à une lunette; car on pourra presque toujours trouver deux stations convenables, comprises dans un même plan vertical que le sommet. Pour ce cas, il sera bon de donner à la relation [1] la forme suivante:

$$H = h\,\frac{\cot\beta}{\cot\alpha}\cdot\frac{\cot\alpha+\cot\gamma}{\cot\beta-\cot\gamma}.$$

FIN DU TOME TROISIÈME.

TABLE DES MATIÈRES.

AVERTISSEMENT . . . . . *pag.* v

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE.

Qu'est-ce que la force ? . . . . . » 5

L'AIR COMPRIMÉ . . . . . » 37

Préface . . . . . » 39

Théorie du compresseur à colonne d'eau de MM. Grandis, Grattoni et Sommeiller, et applications au compresseur qui fonctionne au percement des Alpes Cottiennes . . . . . » 43

Description succincte du compresseur à colonne d'eau, et de son jeu . . . . . » 43

Equation différentielle du mouvement applicable aux quatre périodes du jeu de la machine . . . . . » 48

Simplification des équations du mouvement . . . . . » 68

Durée des différentes périodes . . . . . » 77

Rendement du compresseur à colonne d'eau . . . . . *pag.* 82
Etablissement d'une usine à comprimer de l'air . . . . » 90
Applications numériques . . . . . » 94
Réflexions sur la chaleur perdue dans l'emploi de l'air comprimé . . . . . » 106
Note sur l'équivalent mécanique de la chaleur . . . . » 110

Du travail mécanique dépensé dans la compression, et du travail restitué par la détente d'un gaz permanent . . . . . » 115

Des changements de température produits dans les corps solides de forme prismatique par une traction longitudinale . . . . . » 133

SECONDE PARTIE

HYPSOMÉTRIE.

Formule barométrique d'après les observations de M. Glaisher . . . . . » 157

De la mesure des hauteurs par le baromètre, et de la réfraction atmosphérique, dans une atmosphère dont la densité décroît en progression arithmétique . . . . . » 173

I. Constitution de l'atmosphère . . . . . » 174
II. Formule barométrique . . . . . » 191
III. Réfraction atmosphérique . . . . . » 196

De la mesure des hauteurs à l'aide du baromètre . » 219

Table hypsométrique pour déterminer rapidement sur place la différence de niveau de deux stations et pour réduire les indications du baromètre dans une station à ce qu'elles seraient dans une autre » 239

Tableau graphique donnant à vue l'altitude d'une station au moyen de la seule observation du baromètre et du thermomètre à cette même station *pag.* 261

De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante. Caractère auquel on reconnaît qu'une telle résolution est possible. Graduation de la règle . . . . . » 281

Règle glissante donnant les différences de niveau mesurées à l'aide du baromètre . . . . . » 297

Nouvelles tables hypsométriques . . . . . » 319

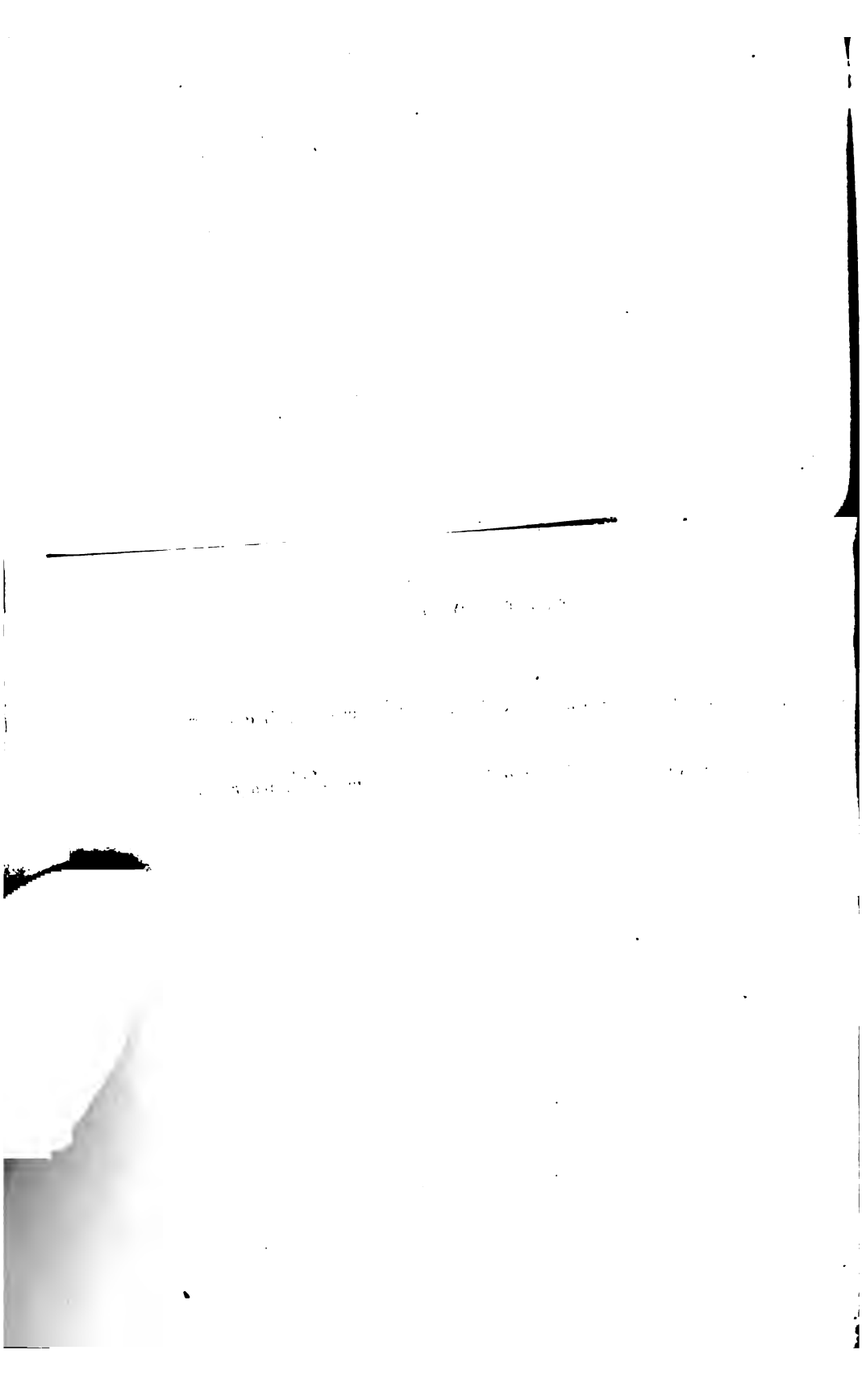
Détermination de la hauteur d'une montagne inaccessible, à l'aide du baromètre et d'un instrument pour mesurer les angles . . . . . » 397

Fin de la table des matières du tome troisième.

ERRATA DU TOME II.

Page 34, *ligne* 10 : $\omega_1 = \omega_0 - amv_0 \sin\alpha\left(1-\sqrt{1-K}\right) = \omega_0 - am\sin\alpha\,(v_0 - v_1)$

lisez : $\omega_1 = \omega_0 - \dfrac{amv_0}{I}\sin\alpha\left(1-\sqrt{1-K}\right) = \omega_0 - \dfrac{am}{I}\sin\alpha\,(v_0 - v_1)$



PRIX : 8 francs.